INSTITUZIONI
DI MATEMATICA
PER L'ACCADEMIA MILITARE
DEL BATTAGLIONE
REAL FERDINANDO

TOMO II.

DELLA GEOMETRIA SOLIDA,
E DELLE SEZIONI DEL CONO.

IN NAPOLI
PRESSO I FRATELLI SIMONI.

MDCCLXXIV.



DELLA
GEOMETRIA SOLIDA.

LIBRO I.

DEFINIZIONI.

I. IL *Solido* è una grandezza lunga, larga, ed alta: e termina in ſuperficie.

II. La retta linea, che da un punto ſublime arrivando ſopra un piano, è perpendicolare à quante rette nel piano tirar ſi poſſono dal punto, dove ella arriva, *Retta* al piano, o *Perpendicolare*; altrimenti *Inclinata*, o vero *Obliqua* ſi dice.

III. L' *Inclinazione* dell' obliqua al piano è l'acuto angolo compreſo da eſſa e dalla retta, che nel piano ſi conduce tra' termini dell' obli-

qua medesima e della perpendicolare, che sul piano cade dal punto stesso sublime, donde l'obliqua cade.

IV. Se le perpendicolari, che sopra la sezione di due piani s' alzano in uno, all' altro sono rette; uno *Retto* all' altro, o *Perpendicolare*; altrimenti *Obliquo* si dice, o *Inclinato*.

V. L' *Inclinazione* di essi è l' acuto angolo fatto da due perpendicolari, che su la comune sezione s' innalzano dal punto medesimo, una in un piano, ed una nell' altro.

VI. Due piani sono ad altri due *Similmente Inclinati*; se uguali sono gli angoli delle loro inclinazioni.

VII. I piani *Paralleli* sono quei, che non mai s' incontrano.

VIII. L' *Angolo Solido* è quello, che si comprende da più, che da due angoli piani tra se inclinati, e costituiti a un punto stesso.

IX. Le figure solide terminate da piani simili, e di moltitudine uguali, sono *Simili*. Sono in oltre *Simili ed Uguali* le terminate da piani simili, ed uguali di moltitudine non meno, che di grandezza.

X. Il *Prisma* è un solido terminato da piani, de' quali due tra se opposti sono uguali, simili, e paralleli, ed i rimanenti sono parallelogrammi.

XI. De' prismi poi quello, che termina in sei parallelogrammi, si chiama *Parallelepipedo*. E *Cubo* si chiama quello, che termina in sei quadrati uguali.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

Di una linea retta non può parte giacere in un piano, parte elevarsi in sublime.

Altrimenti della medesima retta AC le parti AB,BC costituirebbono l'angolo ABC; se di esse una AB nel piano DE, ed una BC fosse in sublime. Tav.I. *Fig.*1.

PROPOSIZIONE II.

Ogni triangolo è in un sol piano; ed in un solo due rette, che si segano.

Altrimenti se in un piano fosse del triangolo ABC la parte ADE, e la rimanente DC in uno diverso; dovrebbe della retta AC la parte AE giacere in un piano, ed in uno diverso la rimanente EC, il che ripugna (*pr.* 1.). *Fig.* 2.

Quindi in un sol piano esistono i lati AB, AC del triangolo ABC. Ma della retta BG le parti BA, AG, e le altre CA, AF della retta CF esistono ancor esse in un piano solo. In un sol piano adunque sono le rette BG, CF, che si segano in A.

PROPOSIZIONE III.

La sezione di due piani è una linea retta.

Si seghino tra se i piani AB, CD. La retta CB sarà di essi la sezione. *Fig.* 3.

Perciocchè segandosi de' dati piani gli estremi da una parte in C, dall' opposta in B; la sezione di amendue sarà la linea, che in amendue a' punti estremi C e B s' interpone. Or se

retta ella non sia; condotta nel piano AB la retta CEB, e la CFB nel piano CD, queste tra' medesimi termini distese racchiuderebbono spazio. Siccome adunque ciò è assurdo (*as.7.*), assurdo è così, che la sezione de' piani AB, CD non sia la retta CB.

PROPOSIZIONE IV.

La perpendicolare a due rette, che si segano, al piano di esse è perpendicolare.

Fig. 4. Alle rette AB, CD, che si segano in E, sia perpendicolare la FE. Perpendicolare altresì sarà al piano, che per AB passa e per CD.

Imperocchè fatte tra se uguali le rette EA, EB, EC, ED; e tirate le altre AC, DB, GEH; cogli estremi di queste si congiunga il punto sublime F. E poichè i triangoli EAC, EBD hanno uguali ed i lati, e gli angoli al vertice; avranno uguali e le basi AC, DB, e gli angoli EAG, EBH (4.1.*p.*). Uguali però sono anche gli angoli AEG, BEH (15.1.*p.*). Sicchè ne' triangoli AGE, BHE il lato AG a BH, e GE ad HE sarà uguale (26.1.*p.*). Ora i due triangoli FEA, FEB, e i due FEC, FED avendo retti gli angoli in E, il lato FE comune, ed uguali i rimanenti; avranno uguali le basi FA ed FB, FC ed FD. Laonde ne' triangoli tra se equilateri FAC, FBD l'angolo FAG uguaglierà l'altro FBH (8.1.*p.*). Ed FA ad FB, ed AG è uguale a BH. Dunque la base FG uguaglierà la FH. Quindi essendo ne' triangoli FEG, FEH uguali in oltre i lati

i lati EG, EH, ed FE comune; uguali saranno gli angoli FEG, FEH. E quindi la FE sarà perpendicolare a GH (*def.* 5. 1. *p.*). Perpendicolare somigliantemente si dimostra ad ogni altra retta, che per E passa nel piano delle due AB, CD. A quel piano pertanto la FE sarà retta (*def.* 2.).

PROPOSIZIONE V.

Nello stesso piano sono tre rette, che s' incontrano in un punto, ed alle quali è perpendicolare in quel punto una retta stessa.

Sia la retta AB perpendicolare alle tre AC, AD, AE, che s' incontrano in A; e le due AC, AD sieno nel piano FG. Nel medesimo giacerà anche la terza AE. *Fig.* 5.

Altrimenti sia in sublime; e delle due AB, AE il piano BH (*pr.* 2.) faccia coll' altro FG la sezione AH (*pr.* 3.). Ed essendo AB perpendicolare alle due AC, AD; sarà altresì perpendicolare al piano FG (*pr.* 4.); e quindi alla retta AH (*def.* 2.). Ma è perpendicolare ad AE. Sicchè gli angoli BAH, BAE costituiti al punto stesso nello stesso piano saranno retti, ed uguali (*as.* 9.). La qual cosa ripugnando (*as.* 6.); ripugna parimente, che la retta AE non sia nel piano delle due AC, AD.

PROPOSIZIONE VI.

Le perpendicolari al medesimo piano sono tra se parallele.

Fig. 6. Le rette AB, CD sieno al piano EF perpendicolari. Saranno parallele.

Imperocchè congiunta la BD; elevata su di essa nel piano EF la perpendicolare DG (11. 1. *p.*); e fatta la DG uguale a BA, si conducano le tre BG, AG, AD. E poichè i triangoli ABD, BDG hanno il lato BD comune, l' altro AB uguale a DG, e l' angolo ABD, fatto dalla retta al piano, uguale al retto BDG; avranno uguali le basi AD, BG (4. 1. *p.*). Poichè dunque ne' triangoli ABG, ADG oltre la base AG comune sono uguali i lati AB e DG, BG ed AD; uguali saranno gli angoli ABG, ADG (8. 1. *p.*). E per la retta al piano è retto l' angolo ABG (*def.* 2.). Sicchè l' altro ADG ancor esso sarà retto. Perciò la DG sarà perpendicolare alle tre DB, DA, DC; e queste perciò giaceranno nel piano medesimo (*pr.* 5.). Or nel piano triangolare delle due DB, DA è anche la retta BA (*pr.* 2.). Per la qual cosa nello stesso piano esisteranno le due BA, DC. Tra esse però cadendo la BD, fa retti gl' interni angoli ABD, BDC (*def.* 2.). Dunque le rette AB, CD saranno tra se parallele (28. 1. *p.*).

PROPOSIZIONE VII.

Nel piano di due parallele è la retta, che ne congiugne due punti.

Fig. 7. Altrimenti se in un piano diverso fosse la retta EGF, che delle parallele AB, CD congiugne i punti E, F; continuato quel piano, finchè

chè nell' altro delle parallele faccia la sezione rettilinea EF (*pr.* 3.), è chiaro, che le due rette EF, EGF comprenderebbono spazio contro l'indole delle rette linee.

PROPOSIZIONE VIII.

Se una di due parallele è retta a un piano; retta allo stesso sarà anche l'altra.

Sia AB e retta al piano EF, e parallela a CD. Questa altresì al piano EF sarà retta. *Fig.* 6

Perciocchè se sopra la DB s' alzi la perpendicolare DG; la medesima si dimostrerà parimente perpendicolare a DA (*pr.* 6.); onde sarà retta al piano ADB (*pr.* 4.). In quello però sono e le due AB, BD (*pr.* 2.); e quindi ancora la DC (*pr.* 7.). Pertanto l'angolo CDG sarà retto (*def.* 2.). Ed essendo retto l'angolo ABD fatto dalla retta al piano; per le parallele AB, CD retto esser dee l' altro CDB (29. 1. *p.*). Sicchè la CD perpendicolare alle due DB, DG, al piano EF sarà perpendicolare (*pr.* 4.).

PROPOSIZIONE IX.

Le parallele alla stessa retta, benchè in piani diversi, sono tra se parallele.

In diversi piani sieno ad AB parallele le due CD, EF. Queste tra se parallele saranno. *Fig.* 8

Perciocchè se da un punto qualunque G s'alzi sopra AB la perpendicolare GH nel piano delle due AB, CD, e l' altra GI nel piano delle

delle altre AB, EF (11. 1. *p.*); sarà AB retta al piano GHI (*pr.* 4.). Come però CD, così EF è ad AB parallela. Come CD adunque, sarà così EF retta al piano stesso (*pr.* 8.). Ma le rette allo stesso piano tra se sono parallele (*pr.* 6.). Sicchè CD sarà parallela ad EF.

PROPOSIZIONE X.

Gli angoli, che in piani diversi hanno paralleli i lati, sono tra se uguali.

Fig. 9. Sieno paralleli in un piano i lati AB, DE, in uno diverso gli altri AC, DF de' due angoli BAC, EDF. Questi tra se uguali saranno.

Perciocchè fatta la DE uguale ad AB, e la DF ad AC, si congiungano di esse gli estremi. E poichè uguali sono e parallele AB e DE, AC e DF; uguali altresì e parallele saranno AD e BE, AD e CF (33. 1. *p.*). Laonde BE sarà a CF ed uguale (*as.* 1.), e parallela (*pr.* 9.). Quindi le due BC, EF, che le congiungono, sono uguali. E quindi ne' triangoli tra se equilateri ABC, DEF uguali saranno gli angoli BAC, EDF (8. 1. *p.*).

PROPOSIZIONE XI.

Da un dato punto sublime sopra un dato piano abbassare una perpendicolare.

Fig. 10. Sia uopo dal punto sublime A abbassare una perpendicolare sul piano BC.

Sopra una qualunque retta DE tirata nel piano BC si faccia da A cadere la perpendicolare AF

AF (12. 1. *p.*), la quale se al piano BC sia retta, si sarà sciolto il problema. Altrimenti dal punto F su la DE s' innalzi la perpendicolare FG nello stesso piano BC (11. 1. *p.*); e su la FG si abbassi dal punto A la perpendicolare AH. Questa sarà la richiesta.

Imperocchè essendo DE perpendicolare alle due FA, FH; sarà retta al piano AFH (*pr.* 4.). Se pertanto nell' altro BC si conduca per H la IK parallela a DE (31. 1. *p.*); ancor essa al piano medesimo AFH sarà retta (*pr.* 8.). Perciò AH sarà perpendicolare alle due IK ed FG, che si segano in H. E perciò retta sarà al dato piano BC (*pr.* 4.).

PROPOSIZIONE XII.

Da un punto dato in un dato piano elevare su di esso una perpendicolare.

Debbasi dal punto A innalzare una perpendicolare sul piano BC. Si faccia da un punto sublime D cadere sul piano BC la perpendicolare DE (*pr.* 11.); e se per A si conduca AF parallela a DE (31. 1. *p.*); quella sarà retta al dato piano (*pr.*8.). *Fig.* 11.

PROPOSIZIONE XIII.

Da un solo punto non si può tirare a un piano, se non che una perpendicolare sola.

Altrimenti se potessero sopra il piano BC o cadere dal punto A le perpendicolari AD, AE, o da F elevarsi le altre FG, FH; conciossiachè *Fig.* 12.

chè le prime, non meno che le altre sarebbono tra se parallele (*pr. 6.*), potrebbero le parallele incontrarsi; il che è assurdo.

PROPOSIZIONE XIV.

I piani, a' quali la retta medesima è perpendicolare, tra se sono paralleli.

Fig. 13. Altrimenti se i piani AB, CD, su de' quali perpendicolarmente sta la retta EF, andassero distesi ad incontrarsi nella linea GH; condotte a un punto di quella le rette EI, FI, nel triangolo EFI sarebbero retti i due angoli E, F (*def.* 2.); il che ripugna (17. 1. *p.*).

PROPOSIZIONE XV.

Paralleli sono i piani, de' quali due lati paralleli a due in due piani diversi s' incontrano.

Fig. 14. Sia in un piano AB parallela a DE, ed AC a DF in uno diverso. Sarà il piano BC parallelo ad EF.

Imperocchè se dal punto A sul piano EF si tiri la perpendicolare AG (*pr.* 11.), e per G la GH parallela a DE, e la GI a DF (31. 1. *p.*); sarà AG perpendicolare alle due GH, GI (*def.* 2.), e GH in oltre parallela ad AB, e GI ad AC (*pr.* 9.). Poichè dunque uguagliano due retti e i due angoli HGA, GAB, e i due IGA, GAC (29. 1. *p.*); tolti i retti HGA, IGA, retti rimarranno gli altri GAB, GAC; onde GA sarà perpendicolare e alle due AB, AC, ed al piano BC (*pr.* 4.). Ma è retta al piano

piano EF. Dunque i piani BC, EF saranno paralleli (*pr.* 14.).

PROPOSIZIONE XVI.

De' piani paralleli segati da un terzo piano parallele sono le sezioni.

Altrimenti se de' paralleli piani AB, CD segati dal piano EH le sezioni EF, GH s'incontrassero in I; perchè di una retta non può parte giacere in un piano, parte in un altro (*pr.* 1.), distesi verso I i piani AB, CD, ancor essi in I s'incontrerebbero; onde contro l'ipòtesi non sarebbono tra se paralleli. *Fig.* 15.

PROPOSIZIONE XVII.

Le rette segate da più piani paralleli sono segate in parti proporzionali.

I piani paralleli AB, CD, EF seghino le rette GH, IK in G, L; H, ed I, M, K. Sarà GL ad LH, come IM ad MK. *Fig.* 16.

Perocchè tirata la GK, che segherà il piano CD in N, si congiungano le due LN, NM, e le due GI, HK. E poichè de' paralleli piani CD, EF segati dal triangolo GHK le sezioni LN, HK sono parallele (*pr.* 16.); si avrà GL ad LH, come GN ad NK (2.6.*p.*). Come però GN ad NK, si ha così IM ad MK; conciossiachè de' piani paralleli AB, CD segati dal triangolo GKI parallele sono le sezioni GI, NM. Si avrà pertanto GL ad LH, come IM ad MK (11.5.*p.*).

PRO-

PROPOSIZIONE XVIII.

I piani, che passano per una retta perpendicolare a un piano, a quel piano sono retti.

Fig. 17. Per la linea AB retta al piano CD passi il piano EF. Questo all' altro CD sarà retto.

Imperocchè se sopra la GF sezione de' piani EF, CD da un punto I s' elevi nel piano EF la perpendicolare IH (11.1.*p.*); l'angolo BIH sarà retto. E l' altro ABI fatto dalla retta al piano è parimente retto (*def.* 2.). Sicchè le rette AB, HI saranno parallele (28. 1.*p.*). Di esse però una AB è retta al piano CD. Dunque anche l' altra HI (*pr.* 8.). Somigliantemente al piano CD retta si dimostra ogni altra perpendicolare, che su la sezione GF s' innalza nel piano EF. Questo pertanto retto sarà all' altro CD (*def.* 4.).

PROPOSIZIONE XIX.

La sezione di due piani, retti ad un altro, a quell' altro piano è retta.

Fig. 18. Altrimenti se la sezione AB de' piani CD, EF, retti al terzo GD, fosse allo stesso GD obliqua; erigendosi nel piano CD la perpendicolare BH sopra la sezione BD, e sopra la sezione BF la perpendicolare BI nel piano EF (11. 1.*p.*); sarebbe BH, non meno che BI perpendicolare al piano GD (*def.* 4.); la qual cosa ripugna (*pr.* 13.).

PRO-

PROPOSIZIONE XX.

Di tre piani angoli, che comprendano un angolo solido, due insieme sono maggiori del terzo.

Costituiscano l' angolo solido A i tre piani BAC, BAD, CAD; e se questi sieno tra se uguali, è per sè manifesta del teorema la verità. Se poi sieno disuguali, anche in tal caso due di essi insieme presi saranno maggiori del rimanente. *Fig.* 19.

Imperocchè fatto al vertice A dell' angolo maggiore l' altro CAE uguale al minore CAB, ed il lato AE uguale ad AB, se si conducano le due CB, CE; queste tra se saranno uguali (4. 1. *p.*). Or prolungata in D la CE, e condotta la BD, le due BC, BD sono maggiori di CD (20. 1. *p.*). Tolte pertanto le uguali BC, CE, resterà BD maggiore di ED. Ma il lato AB è uguale ad AE, e l'altro AD è comune a' triangoli ABD, AED. Sicchè l'angolo DAB di DAE sarà maggiore (25. 1. *p.*). Quindi i due angoli BAC, BAD saranno maggiori de' due CAE, EAD, o dell' intero CAD.

PROPOSIZIONE XXI.

Gli angoli piani, de' quali il solido angolo si compone, di quattro retti sono minori.

Costi di più angoli piani il solido angolo A. Quei tutti saranno minori di quattro retti. *Fig.* 20.

Imperocchè distesi di que' piani angoli i lati, finchè i loro termini sul piano stesso congiunti

giunti diano il poligono BCD, è chiaro, che ad ogni estremo di esso si avrà un angolo solido contenuto da tre angoli piani. Di questi però i due, che sono alle basi de' triangoli sublimi, del rimanente sono maggiori (*pr.* 20.). Per la qual cosa tutti gli angoli alle basi di que' triangoli, se insieme si prendano, saranno maggiori degli angoli tutti del poligono presi insieme. E questi uguagliano due volte tanti retti, quanti del poligono sono i lati, meno quattro (*cor.* 5. 32. 1. *p.*). Dunque quelli saranno più, che due volte tanti retti, quanti sono i lati del poligono, o vero i triangoli stessi, meno quattro. Ma quelli insieme e gli altri, che al vertice rimangono, uguagliano due volte tanti retti, quanti sono i triangoli (32. 1. *p.*). Quelli adunque tolti, i rimanenti al vertice, de' quali si compone l' angolo solido A, saranno minori di quattro retti.

Corol. Quindi cinque soltanto sono le differenti specie de' *Solidi Regolari*, terminati cioè da piani ed ordinati e tra se uguali. Perocchè essendo ogni angolo di triangolo equilatero uguale a due terze di un retto; come si potrà di tre, di quattro, di cinque di essi, che alla somma di quattro retti non arrivano; così di sei, che l' uguagliano, e di più di sei, che la superano, non si potrà un angolo solido costituire. Conciossiachè in oltre tre angoli di quadrati sono tre retti, e quattro adeguano, e più di quattro eccedono di quattro retti la somma; si potrà di tre, di più non potrassi un angolo solido comporre. E similmente perchè l' angolo

lo del pentagono regolare uguaglia sei quinte di un retto; tre di essi siccome minori potranno, più di tre siccome maggiori di quattro retti formar non potranno un angolo solido. Conciossiachè dunque di quattro retti non sono minori nè tre, nè più che tre angoli di essagono, o di altro poligono ordinato (*cor.* 5. 32. 1. *p.*); oltre que' cinque, de' piani angoli delle figure regolari altro angolo solido non si potrà costruire. Pertanto se quattro, otto, o venti triangoli equilateri ed uguali si dispongano in maniera, che concorrendo i primi in quattro punti estremi, formino quattro angoli solidi, ciascuno compreso da tre piani; concorrendo gli altri in sei punti estremi, ne formino sei, ciascuno compreso da quattro piani, e gli ultimi in dodeci estremi punti concorrendo, dodeci ne formino, compreso ciascuno da cinque piani: si avranno tre specie di solidi ordinati, de' primi il *Tetraedro*, degli altri l' *Ottaedro*, degli ultimi l' *Icosaedro*. E se di più si uniscano o sei quadrati uguali, o dodeci pentagoni uguali ed ordinati, tal che vadano a terminare quelli in otto, questi in venti angoli solidi, ciascuno di tre piani; si avrà di quelli il *Cubo*, e il *Dodecaedro* di questi, cioè le due ultime specie de' solidi regolari.

PROPOSIZIONE XXII.

Delle rette tirate per gli estremi de' lati uguali di tre angoli piani, de' quali due comunque presi insieme sono maggiori del rimanente, descriver si può un triangolo.

Fig. 21. Gli angoli A, B, C a due a due sieno maggiori del terzo, ed abbiano i lati tutti tra se uguali. Si potrà delle rette DE, FG, HI, che ne congiungono i termini, costituire un triangolo.

Imperocchè, se gli angoli A, B, C sieno uguali; per l' uguaglianza de' loro lati, uguali parimente saranno le basi DE, FG, HI (4. 1. *p.*). Laonde siccome due qualunque di esse insieme prese eccedono in lunghezza la rimanente; si potrà così un triangolo di tutte tre costituire (22. 1. *p.*). Se poi sieno disuguali, ed il massimo sia FBG, siccome per gli uguali lati la base FG sarà la massima (24. 1. *p.*); così fatto l' angolo FBK uguale ad A (23. 1. *p.*), il lato BK ad AE, e tirata la base FK, questa sarà uguale a DE (4. 1. *p.*). Poichè però i due angoli A, C sono maggiori di FBG; tolti gli uguali A ed FBK, rimane C maggiore di KBG. Poichè dunque CH a BK, e CI a BG è uguale; se si conduca la KG, sarà HI maggiore di KG; onde le due DE, HI saranno maggiori delle due FK, KG. Ma queste sono maggiori di FG (20. 1. *p.*). Dunque ancor quelle. Ed è chiaro, che le due DE, FG di HI, e le due FG, HI sieno di DE maggiori. Sicchè delle tre DE, FG, HI si potrà descrivere un triangolo.

Fig. 22. Corol. Sia questo il triangolo LMN, ed abbia il lato LM uguale a DE, MN ad FG, NL ad HI. E poichè il quadrato di MN esser può minore, uguale, o maggiore de' due di LM e di LN; il triangolo LMN esser potrà acutangolo (13. 2. *p.*), rettangolo (47. 1. *p.*),

p.), o vero ottusangolo (12. 2. *p.*). Laonde se dintorno ad esso si descriva il cerchio (5. 4. *p.*); nel primo caso caderà il centro O dentro il triangolo, nell'altro sul lato MN, e nel terzo al di fuori del triangolo stesso (31. 3. *p.*). Pongansi gli angoli A, B, C minori di quattro retti; ed in ogni caso il lato AD sarà maggiore del raggio OL.

Altrimenti se nel primo fosse AD uguale ad OL, ed AE ad OM; essendo DE uguale ad LM, sarebbe l'angolo A uguale ad LOM (8. 1. *p.*); e B ad MON, e C ad NOL per la ragione medesima. A quattro retti però sono uguali i tre LOM, MON, NOL (*cor.*15. 1. *p.*). Dunque i tre A, B, C ancor essi uguaglierebbono quattro retti, contro l'ipotesi. Se poi fosse AD minore di OL; fatta OP uguale ad AD, OQ ad AE, e congiunta la PQ, sarebbe PL uguale a QM (*as.* 3.); OP a PL, come OQ a QM (7. 5. *p.*); PQ parallela ad LM (2. 6. *p.*); OL ad LM, come OP a PQ ne' triangoli equiangoli OLM, OPQ (4. 6. *p.*); e siccome OL di OP, così LM, o l' uguale DE maggiore di PQ (14. 5. *p.*). Dunque ne' triangoli ADE, OPQ sarebbe l' angolo A maggiore di POQ (25. 1. *p.*). Nella stessa maniera B di MON, e C di NOL si dimostra maggiore. Per la qual cosa i tre angoli A, B, C, maggiori de' tre costituiti dintorno al punto O, parimente contro l' ipotesi eccederebbono quattro retti.

Nell'altro caso se non fosse AD maggiore di OL; nè i due lati BF, BG sarebbono mag-

giori de' due raggi OM, ON, o del diametro MN, o dell' uguale FG, contro l' indole del triangolo.

E nell' ultimo se AD fosse uguale ad OL; i due angoli A, C sarebbono uguali a' due LOM, LON, o all' intero MON, o a quello, che l' uguaglia, cioè al terzo B (*caf.* 1.); il che all' ipotesi ripugna. Che se AD di OL, e perciò l' angolo POQ di A fosse minore (*caf.* 1.); fatto l' altro POS uguale ad A, OS ad AE, e tirata la PS, sarebbe ne' triangoli OPS, ADE la base PS uguale a DE (4. 1. *p.*), o ad LM. Somigliantemente si ha PI uguale ad LN. Essendo pertanto l' angolo SPI minore di QPR, o dell' uguale MLN per le parallele PQ ed LM, PR ed LN (*caf.* 1.); condotta la ST, ne' triangoli PST, LMN sarebbe la base ST minore di MN (24. 1. *p.*), o di FG. Ma ne' triangoli OST, BFG il lato OS a BF, ed OT a BG è uguale. Sicchè l' angolo SOT sarebbe minore di B (25. 1. *p.*), cioè i due POS, POT, o i due A, C del rimanente B sarebbono minori. Il che di nuovo all' ipotesi ripugnando; in ogni caso ripugna, che AD di OL non sia maggiore.

Fig. 23. Quindi se sopra la retta XY uguale ad AD si descriva il semicerchio XZY; si potrà in esso adattare una retta XZ uguale ad OL, che del diametro XY è minore (1. 4. *p.*).

PROPOSIZIONE XXIII.

Costruire un angolo solido di tre dati angoli piani minori di quattro retti, de' quali due in qual

qualsivoglia maniera presi insieme sieno maggiori del rimanente.

Sia uopo de' tre angoli A, B, C, che abbiano le proposte condizioni, formare un angolo solido. Fig. 21. 22. 23.

Fatti tra se uguali di essi i lati, e costituito delle rette, che ne uniscono gli estremi, il triangolo LMN (*pr.* 22.), e dintorno a quello il cerchio (5. 4. *p.*), sopra la retta XY uguale ad AD si descriva il semicerchio XZY; si adatti in questo la retta XZ uguale ad OL (*cor. prec.*); si congiunga la ZY; l'uguale OV dal centro O s'alzi perpendicolarmente sul piano LMN (*pr.*11.); e dal punto sublime V si conducano le rette VL, VM, VN. Il solido angolo V, che dagli angoli piani LVM, MVN, NVL si comprende, sarà il richiesto.

Perocchè, ne' triangoli OLV, ZXY essendo il lato OL a ZX, OV a ZY, e l'angolo VOL, fatto dalla retta al piano, uguale al retto Z nel semicerchio; sarà la base VL uguale ad XY (4. 1. *p.*), o vero ad AD. Per la ragione stessa VM è uguale ad AE. Conciossiachè dunque ne' triangoli VLM, ADE anche la base LM è uguale a DE; sarà l'angolo LVM uguale ad A (8. 1. *p.*). Similmente si dimostra l'angolo MVN a B, ed NVL uguale a C. Sicchè l'angolo solido V costerà di tre piani angoli, ciascuno uguale a ciascuno de' dati.

PROPOSIZIONE XXIV.

Di un solido, che termina in sei piani paralleli, gli opposti sono parallelogrammi, ed uguali, e simili.

TAV.II. *Fig.* 1. Termini il solido AB ne' piani paralleli AC e DB, AE e CF, AF e CE. Questi tutti saranno parallelogrammi, ed uguali saranno, e simili quei, che tra se si oppongono.

Imperciocchè parallele essendo e le sezioni AG, HC de' piani paralleli AE e CF col terzo AC, e le sezioni AH, GC degli altri AF e CE col medesimo AC (*pr.*16.); il quadrilatero AC sarà un parallelogrammo; siccome ogni altro termine del solido AB per la stessa ragione.

Ora nel parallelogrammo AE i lati AG, DE sono paralleli, non meno che gli altri AH, DF nel parallelogrammo AF. Sicchè l'angolo GAH sarà uguale ad EDF (*pr.* 10.). Uguali sono in oltre ed i lati AG, DE, e gli altri AH, DF (34. 1. *p.*). Sicchè condotte le diagonali GH, EF, i triangoli AGH, DEF saranno tra se uguali (4. 1. *p.*). E sono le metà de' parallelogrammi AC, DB (34. 1. *p.*). Dunque ancor questi, e per la ragione stessa gli altri AE e CF, AF e CE uguali tra se saranno.

Di più è manifesto, che i medesimi sieno equiangoli, ed abbiano proporzionali i lati dintorno agli angoli uguali. Per la qual cosa saranno parimente tra se simili.

PROPOSIZIONE XXV.

Il parallelepipedo, segato da un piano parallelo agli opposti, è segato in parti proporzionali alle basi.

TAV.II. *Fig.* 2. Il solido AB dal piano CD parallelo ad AE ed FB sia segato in due AD, DF. Sarà AD a DF, come EG a GB.

Per-

Perciocchè prolungata a dirittura la EB verso I, e K, e presa EH ed HI uguale ad ED; e BK a BD, se si compiano i parallelogrammi EL, LI, BM, e su di essi i solidi EN, NI, BO; è chiaro, che uguali e simili tra se sieno ed i parallelogrammi EG, EL, LI, conciossiachè fatti sopra basi uguali, ed equiangoli; e per la ragione stessa gli altri GA, AL, LP; non meno che gli altri CD, AE, NH, conciossiachè opposti ne' solidi AD, AH; e gli altri tutti al fine, che a tutti quelli si oppongono ne' tre parallelepipedi AD, AH, HP (*pr.* 24.). Laonde questi saranno tra se uguali (*def.* 9.). Uguali similmente si dimostrano e le basi GB, BM, ed i solidi CB, BO. Quanto adunque il solido PD di AD, altrettanto la base IG sarà di EG moltiplice; e quanto l'altro CK di CB, altrettanto sarà la base GK moltiplice di GB. Ma se la base IG sia uguale à GK, anche il solido PD esser dee uguale a CK; ed esser dee maggiore, o minore di esso, se IG di GK maggiore sia, o minore. Dunque il solido AD a CB si avrà, come la base EG a GB (*def.* 4. 5. *p.*).

PROPOSIZIONE XXVI.

Ad un dato punto di una retta data costruire un angolo solido uguale ad uno compreso da tre angoli piani.

De' tre angoli BAC, BAD, CAD sia fatto il solido angolo A; e far si debba l' uguale al punto E della retta EF. Tav. I. *Fig.* 3.

Sul piano BAC si abbassi dal punto sublime D la perpendicolare DG (*pr.* 11.), e congiunta la GA si costituisca al punto E della data EF l'angolo FEH uguale a BAC, e l'altro FEI a BAG (23.1.*p.*); presa poi la EI uguale ad AG, s'innalzi dal punto I la perpendicolare IK sul piano FEH (*pr.* 12.); e fatta la IK uguale a GD, si conduca la KE. L'angolo solido E, contenuto da' piani FEH,FEK,HEK, sarà il richiesto.

Imperocchè presa EF uguale ad AB, ed EH ad AC, si uniscano i punti B, C con G, D, ed i punti F, H con I, K. Ed essendo ne' triangoli ABG, EFI il lato AB uguale ad EF, l'altro AG ad EI, e l'angolo BAG ad FEI; sarà la base BG uguale ad FI (4.1.*p.*). Ma la perpendicolare GD ad IK, e l'angolo retto BGD al retto FIK è uguale. Pertanto ne' due triangoli CBD, IFK anche la base BD sarà uguale ad FK. E ne' due GAD, IEK per l'uguaglianza de' lati GA, IE, degli altri GD, IK, e de' retti angoli DGA, KIE esser dee la base AD uguale ad EK. Essendo adunque ne' triangoli ABD, EFK i lati AB ed EF, AD ed EK, BD ed FK tra se uguali; uguali altresì saranno gli angoli BAD, FEK (8.1.*p.*). Conciossiachè però tolti gli angoli uguali BAG, FEI dagli uguali BAC, FEH, rimangono uguali gli angoli GAC, IEH; secondo la precedente dimostrazione è chiaro, che gli altri CAD, HEK ancor essi sieno tra se uguali. Conciossiachè dunque de' tre piani angoli, che contengono il dato A, ciascuno è uguale a ciascuno

scuno de' tre, de' quali l'altro E si compone; questo sarà l'angolo solido, che costruir si dovea.

PROPOSIZIONE XXVII.

Sopra una data retta descrivere similmente un parallelepipedo simile a un altro dato.

Al parallelepipedo AB similmente costituir si debba il simile su la retta CD. TAV.II. *Fig.* 4.

Si costituisca al punto C della data CD un angolo solido uguale ad A, tal che il piano angolo DCH ad EAF, DCI ad EAG, ed HCI ad FAG sia uguale (*pr.* 26.); fatto poi il lato AE ad AF, come CD a CH, ed AF ad AG, come CH a CI (12. *6.p.*), onde si abbia ordinando AE ad AG, come CD a CI, si compiano i parallelogrammi DH, HI, ID, ed il solido CK. Questo sarà il richiesto.

Imperocchè si conducano le diagonali GE; ID. E poichè i triangoli AEG, CDI hanno proporzionali i lati intorno agli angoli uguali; simili tra se saranno (*6. 6. p.*). Ne' parallelogrammi però essendo uguali i lati, e gli angoli opposti (34. 1. *p.*); simili altresì esser debbono i triangoli LEG, MDI. Per la qual cosa è manifesto, che simili ancora sieno i parallelogrammi AL, CM; non meno che gli altri EF, DH, e gli altri FG, HI per la medesima ragione. Or de' solidi AB, CK i piani rimanenti sono simili, conciossiachè simili agli opposti (*pr.* 24.). Pertanto al parallelepipedo AB sarà simile l'altro CK similmente descritto su la data CD (*def.* 9.).

PRO-

PROPOSIZIONE XXVIII.

Il parallelepipedo segato da un piano, che passa per le diagonali di due de' piani opposti, è segato per metà.

TAV.II. *Fig.* 1. Nel parallelepipedo AB per le diagonali GH ed EF de' parallelogrammi opposti AC e DB passi il piano GF, che lo seghi. Lo segherà in due prismi AEF, CEF tra se uguali.

Imperocchè per l'uguaglianza degli angoli, e de' lati opposti ne' parallelogrammi (34. 1. *p.*), debbono e i due triangoli AGH, CGH, e i due DEF, BEF essere uguali (4. 1. *p.*), e simili (6. 6. *p.*). Uguali di più, e simili sono e i due parallelogrammi AE, CF, e i due AF, CE (*pr.* 24.). Poichè dunque il piano GF è comune ad amendue i prismi AEF, CEF; termineranno questi in piani simili, e di moltitudine non meno uguali, che di grandezza. Laonde uguali tra se saranno (*def.* 9.).

PROPOSIZIONE XXIX.

I parallelepipedi della stessa base, ed altezza, che hanno gli estremi delle linee insistenti alla base collocati nelle rette medesime, sono tra se uguali.

TAV.II. *Fig.* 5. Abbiano i parallelepipedi AH, AM la base AC, l'altezza AF, i termini delle linee AF ed AK, BG e BL nella retta FL, e nell'altra EM quei delle altre DE e DI, CH e CM. Sarà il solido AH uguale ad AM.

Perciocchè ne' parallelogrammi AG, AL essendo

fendo ad AB uguale ed FG, e KL (34.1.*p.*); farà FG a KL, e quindi FK uguale a GL. In oltre AF a BG, ed AK a BL è eguale. Dunque i triangoli AFK, BGL faranno tra se uguali (8.1.*p.*), e simili (*6.6.p.*); ficcome uguali e fimili fono gli altri DEI, CHM per la ftessa ragione. Ora i parallelogrammi FI, GM per l'uguaglianza de' lati FK e GL, FE e GH fono tra se equilateri; ed equiangoli fono ancora per l'uguaglianza degli angoli tra le parallele. Ancor essi adunque fimili faranno, ed uguali. Ma uguali, e fimili fono gli altri AE e BH, AI e BM (*pr.* 24.). Sicchè uguali faranno i prifmi AEI, BHM (*def.9.*). Se a questi pertanto fi aggiunga il folido ADIKGHCB; farà il parallelepipedo AH uguale ad AM.

PROPOSIZIONE XXX.

I parallelepipedi della medefima bafe, ed altezza, quantunque non abbiano i termini delle linee infiftenti alla bafe collocati nelle rette medefime, tra se nondimeno fono uguali.

Sia AD la bafe, ed AE l'altezza de' parallelepipedi AB, AC. Questi faranno uguali, benchè nelle rette fteffe non efiftano nè gli eftremi delle linee AE ed AF, GH e GI, nè quei delle altre KL e KM, DB e DC.

TAv. *Fig.*

Perciocchè fi prolunghino le rette EH, LB, finchè incontrino la IC diftefa ne' punti O ed N, e diftefa la FM, finchè nel punto P incontri la LB, fi conducano le rette AQ e KP, GO e DN. E poichè i due parallelepipedi AB,

AN hanno la base AD, l'altezza AE, gli estremi delle linee AE ed AQ, GH e GO nella retta EO, e nell'altra LN gli estremi delle altre KL e KP, DB e DN; saranno tra se uguali (*pr.* 29.). Uguali di più sono i due AC, AN; poichè hanno la base AD, l'altezza AE, i termini delle linee AF ed AQ, KM e KP nella retta FP, e nell'altra IN i termini delle altre GI e GO, DC e DN. Sicchè i due AB, AC saranno parimente uguali.

PROPOSIZIONE XXXI.

Uguali tra se sono i parallelepipedi, che hanno basi, ed altezze uguali.

v.II. fig. 7. I parallelepipedi retti AB, CD abbiano la base AE a CF, e l'altezza BE uguale a DF. Sarà AB uguale a CD.

Perocchè posti a dirittura i lati AC, CG; si compiano i parallelogrammi AH, HI, e i solidi AK, KI. Ed essendo il parallelogrammo AE a CF, e CF a GI uguale (35.1.*p.*); sarà AE uguale a GI. Ma poichè il parallelepipedo AK è segato dal piano BC parallelo agli opposti; esser dee il solido AB a CK, come la base AE a CH (*pr.* 25.), o come l'uguale GI alla stessa CH (7.5.*p.*); e come GI a CH, esser dee il solido IL a CK; poichè l'intero IK è segato dal piano LC parallelo agli opposti. Si avrà pertanto come il solido AB a CK, così l'altro IL allo stesso CK (11.5.*p.*); e perciò AB sarà uguale ad IL (9.5.*p.*). Questo però è uguale a CD; conciossiachè esistendo ambi-

ambidue tra' medesimi piani paralleli CL ed ID, hanno la medesima altezza, ed hanno inoltre la base stessa CL, e gli estremi delle linee insistenti alla base nelle stesse rette IF ed MD (*pr.* 29.). Sicchè il parallelepipedo retto AB al retto CD sarà uguale (*as.* 1.).

Ora i parallelepipedi di qualunque obliquità uguagliano i retti della base ed altezza medesima (*pr.* 29. *e* 30.). Siccome questi adunque, così gli obliqui di uguali basi, ed altezze saranno tra se uguali.

Corol. Sieno quindi de' parallelepipedi AB, CD le basi EB, FD uguali, e disuguali le altezze AE, CF. Se dalla maggiore AE tolgasi la parte GE uguale a CF, e per G si tiri il piano GH parallelo ad EB; sarà il solido AH a GB, come AI ad IE (*pr.* 25.), o come AG a GE (1. *6. p.*); e componendo l' intero AB a GB, come AE a GE. Ma il solido GB è uguale a CD; essendo uguali di amendue le basi, e le altezze. Sarà pertanto AB a CD, come AE a CF (7. 5. *p.*). E de' parallelepipedi obliqui, perchè uguali a' retti della base, ed altezza medesima, dee il medesimo avvenire. Dunque i parallelepipedi, che hanno uguali le basi, seguono la ragione delle altezze. Tav. II *Fig.* 8.

PROPOSIZIONE XXXII.

I parallelepipedi ugualmente alti seguono la ragione delle basi.

De' parallelepipedi AB, CD sieno uguali le altez- Tav. II *Fig.* 9.

altezze BE, DF. Si avrà AB a CD, come la base AE a CF.

Imperocchè distefo per diritto il lato AG verso H, e fatto sull' altro EG nell' angolo EGH il parallelogrammo EH uguale a CF (44.1.*p.*), si compia il solido AI. E poichè questo è segato dal piano BG parallelo agli opposti; si avrà AB a BH, come AE ad EH (*pr.* 25.). Ma per l'uguaglianza delle basi EH, CF, e delle altezze BE, DF, il solido BH è uguale a CD. Si avrà dunque AB a CD, come AE a CF (7.5.*p.*).

Tav.II. Fig. 10. Corol. Sieno in oltre de' parallelepipedi AB, CD e le basi EB, FD, e le altezze AE, CF tra se disuguali. Se facciasi come EB ad FD, così CF ad X, e sopra la base GH uguale ad EB coll' altezza IG uguale a CF si costituisca il parallelepipedo IH; si avrà AB ad IH, come AE ad IG, o come AE a CF; ed IH a CD, come GH ad FD, o come EB ad FD, o come CF ad X. Laonde si avrà ordinando AB a CD, come AE ad X. La ragione però di AE ad X si compone delle due di AE a CF, cioè di quella delle altezze, e di CF ad X, cioè di quella delle basi (*n.*13. *cor.*2. 5.*p.*). Convenendo pertanto tal dimostrazione anche a' parallelepipedi obliqui, attesochè questi uguagliano i retti della stessa base, ed altezza; generalmente i parallelepipedi tra se si avranno nella ragione, che di quella delle basi, e dell' altra delle altezze si compone.

PRO.

PROPOSIZIONE XXXIII.

I parallelepipedi simili sono tra se nella triplicata ragione de' lati omologhi.

Simili tra se sieno i parallelepipedi AB, BC. Saranno in ragione triplicata de' lati omologhi DB, BE. Tav. II. *Fig.* 11.

Perciocchè collocati nel piano medesimo i parallelogrammi DF, GE, tal che di essi i lati DB, BE costituiscano una retta sola; per la somiglianza de' dati solidi, e quindi de' piani DF e GE, DH ed EI, in diretto parimente giaceranno e i due lati FB, BG, e i due HB, BI, che con quei primi fanno al vertice B uguali i due angoli DBF, EBG, non meno che i due DBH, EBI; ed intorno a questi di più si avrà il lato DB a BE, e come FB a BG, e come HB a BI. Or se terminato il parallelogrammo FE, si compiano i solidi DK, KG; si avrà il primo parallelepipedo AB all' ugualmente alto BK, come DF ad FE (*pr.* 32.), o come DB a BE (1.*6.p.*); il secondo BK all' ugualmente alto BL, come FE ad EG, o FB a BG, o DB a BE; ed il terzo BL all' ugualmente alto BC, come HE ad EI, o HB a BI, o vero DB a BE. Essendo adunque continuamente proporzionali i quattro solidi AB, BK, BL, BC; la ragione del primo AB all' ultimo BC sarà triplicata di quella, che ha il primo AB a BK, cioè il lato DB all' omologo BE (*n.* 15. *cor.*2. 5.*p.*).

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIV.

I parallelepipedi uguali hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze; e quei, che alle altezze hanno proporzionali reciprocamente le basi, sono uguali.

Perciocchè componendosi la ragione de' parallelepipedi e di quella delle basi, e di quella delle altezze (*cor. pr.* 32.); una delle componenti all' altra inversa sarà simile, se di uguaglianza sia la ragione de' parallelepipedi (*n.* 24. *cor.* 2. 5. *p.*); e la medesima vicendevolmente sarà di uguaglianza, se delle componenti una sia simile all' altra inversa (*n.* 23. *cor.* 2. 5. *p.*).

PROPOSIZIONE XXXV.

Se due rette uguali si adattino in sublime a' vertici di due piani angoli uguali, e di questi i lati da ambedue le parti costituiscano con quelle altri angoli uguali; uguali saranno e le perpendicolari, che sopra i piani de' dati angoli cadono da' termini delle rette sublimi, e gli angoli da esse compresi, e dalle rette, che congiungono degli angoli dati i vertici e gli estremi delle perpendicolari medesime.

TAV. II. *Fig.* 3. Le rette uguali AD, EK applicate in sublime a' vertici A, E degli angoli uguali BAC, FEH, facciano uguali gli altri BAD ed FEK, CAD ed HEK; e sopra de' piani BAC, FEH cadano da' punti sublimi D, K le perpendicolari DG, KI. Queste saranno uguali; e condotte

dotte le rette AG, EI, uguali altresì saranno gli angoli GAD, IEK.

Imperocchè abbassate dal punto G su de' lati AB, AC le perpendicolari GB, GC (12.1. *p.*), si tirino le tre BC, BD, CD. E poichè per l'angolo retto AGD il quadrato di AD uguaglia i due di AG e di GD, e quello di AG i due di AB e di BG per l'angolo retto ABG (47. 1. *p.*); il quadrato di AD uguaglierà i tre di AB, di BG, e di GD.. Quei però di BG e di GD per l'angolo retto BGD uguagliano il solo di BD. Dunque il solo di AD uguaglierà i due di AB e di BD; onde retto sarà l'angolo ABD (48. 1. *p.*). Similmente retto si dimostra l'altro EFK, fatta la stessa costruzione. Perchè dunque ne' triangoli ABD, EFK sono uguali gli angoli BAD, FEK, ed i retti ABD, EFK, ed i lati ad essi opposti AD, EK; uguali parimente saranno i lati AB, EF (26.1.*p.*). Per la ragione medesima uguali sono gli altri AC, EH. Sicchè ne' triangoli ABC, EFH essendo ancora uguali gli angoli BAC, FEH; sarà la base BC uguale ad FH, l'angolo ABC ad EFH, e l'altro ACB ad EHF (4. 1. *p.*). Or tolti questi dagli angoli retti, rimangono uguali e i due CBG, HFI, e i due BCG, FHI. Per l'uguaglianza adunque de' lati BC, FH, uguali saranno anche gli altri BG, FI. Ma AB ad EF, e l'angolo ABG ad EFI è uguale. Sarà pertanto AG uguale ad EI. Quindi se da' quadrati uguali di AD e di EK tolgansi gli uguali di AG e di EI; uguali resteranno quei delle perpendicolari DG, KI. E

quindi DG a KI, e l' angolo GAD ad IEK sarà uguale (8. 1. *p*.).

PROPOSIZIONE XXXVI.

Il parallelepipedo fatto di tre rette continuamente proporzionali uguaglia l' equiangolo, che si fa della media.

Tav.II. Fig.12. Nel parallelepipedo AB si abbia AC a CE, come CE a CD; nell' altro FG ciascuno de' tre lati FH, HK, HI uguagli la media CE; ed il solido angolo C uguagli l' altro H, tal che gli angoli piani ACD ed FHI, ACE ed FHK, DCE ed IHK sieno tra se uguali. Sarà il parallelepipedo AB uguale ad FG.

Imperciocchè essendo l' angolo ACD uguale ad FHI, ed AC ad FH, come HI a CD; sarà il parallelogrammo AD uguale ad FI (14. 6. *p*.). Perchè in oltre le rette uguali CE, HK si sono in sublime applicate a' vertici degli angoli uguali ACD, FHI, ed altri uguali da ambedue le parti ne costituiscono co' lati di essi; se da' punti E, K si abbassino le perpendicolari sopra de' piani AD, FI, quelle saranno uguali (*pr*. 35.). Perchè dunque i solidi AB, FG hanno basi, ed altezze uguali; uguali tra se saranno (*pr*. 31.).

PROPOSIZIONE XXXVII.

I parallelepipedi simili e similmente descritti su de' lati proporzionali formano proporzione; e la formano altresì i lati de' parallelepipedi proporzionali, simili, e descritti similmente sopra di essi.

Per-

Perciocchè essendo la ragione de' parallelepipedi simili triplicata di quella de' lati omologhi (*pr.* 33.); questa vicendevolmente sarà suttriplicata della prima (*n.* 15. *cor.* 2. 5. *p.*). Ma delle ragioni uguali le triplicate non meno, che le suttriplicate, uguali tra se sono (*n.* 27. e 28. *cor.* 2. 5. *p.*). Se pertanto uguali sieno de' lati omologhi le ragioni, i parallelepipedi simili su di essi similmente descritti costituiranno proporzione; e se la costituiscano, le ragioni de' lati omologhi saranno uguali.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Se di due piani uno sia retto all' altro, e da un punto qualsivoglia di uno cada su l' altro una perpendicolare; questa caderà su la sezione di amendue.

Altrimenti dati i piani AB, CD, l'uno retto all'altro, se fuori della loro sezione EB dal punto F del primo cadesse sopra l' altro la perpendicolare FG; abbassata dal punto G la perpendicolare GH alla sezione EB (12. 1. *p.*), e congiunta la FH, retto sarebbe così l' angolo FGH (*def.* 2.), come l' altro GHF (*def.* 4.), contro l' indole del triangolo (17. 1. *p.*). TAV. II. *Fig.* 13.

PROPOSIZIONE XXXIX.

Se di due piani opposti nel parallelepipedo i lati tutti si dividano per metà, e per gli opposti punti delle divisioni due altri piani si conducano; la loro sezione e la diagonale del solido per metà scambievolmente si segheranno.

 Nel

TAV.II. *Fig.*14. Nel solido AB sia la diagonale CD, e per que' punti, ove de' parallelogrammi opposti AC, DB tutti i lati sono per metà divisi, passino i piani EF, GH. La sezione di questi IK e la diagonale CD si segheranno ambedue per metà.

Perciocchè si tirino le rette IA ed IC, KD e KB. E poichè i triangoli GAI, NCI hanno uguali i lati GA ed NC, GI ed NI, e gli alterni angoli AGI, CNI; avranno uguali e le basi AI, CI, e gli angoli GIA, NIC, che al vertice si oppongono (4. 1. *p.*). Imperciò a dirittura giaceranno le due AI, CI, e l' intera AC sarà doppia della sola IC; siccome della DK doppia sarà la DB per la ragione medesima. Or poichè alla stessa MQ è uguale e parallela così la retta AD nel parallelogrammo AQ, come nel parallelogrammo CQ la retta CB (34. 1. *p.*); le due AD, CB debbono uguali esser tra se e parallele (*pr.* 9.). Poichè dunque le due AC, DB condotte tra gli estremi di quelle, e quindi anche le loro metà IC, DK esser debbono uguali e parallele (33. 1. *p.*); le altre CD, IK, che verso le parti contrarie ne congiungono i termini, ed esisteranno nel medesimo piano, e tra se si segheranno (*pr.*7.). In oltre ne' triangoli LIC, LKD fanno uguali gli angoli alterni CIL e DKL, ICL e KDL accanto a' lati uguali IC e DK. Per la qual cosa uguali saranno i lati rimanenti IL ed LK, CL ed LD (26. 1. *p.*).

PROPOSIZIONE XL.

Se di due prismi triangolari ugualmente alti l'u-

no

no abbia la base parallelogramma doppia della base triangolare dell' altro ; l' uno all' altro sarà uguale.

I prismi ABC, DEF abbiano uguali le altezze AG, DH; ed il parallelogrammo BC base del primo sia doppio del triangolo HEF base dell' altro: Sarà il primo uguale all'altro. Tav.II. *Fig.*15.

Imperocchè terminato il parallelogrammo HI, si compiano i solidi GK, HL. Ed essendo doppio del triangolo HFE il parallelogrammo BC, non meno che l'altro HI (34. 1.*p.*); sarà BC uguale ad HI. Perchè dunque i parallelepipedi GK, HL hanno uguali e le basi BC, HI, e le altezze AG, DH; saranno tra se uguali (*pr.*31.). Di essi però sono le metà i prismi ABC, DEF (*pr.* 28.). Sicchè questi ancora uguali tra se saranno.

Corol. Del rimanente essendo i prismi triangolari le metà de' parallelepipedi ugualmente alti, che su le basi parallelogramme doppie delle triangolari si costituiscono (*pr.*28.); siccome questi (*pr.* 32.), quelli così se abbiano uguali altezze, seguiranno delle basi la ragione.

Essendo pertanto i tre prismi ABCD, ABDE, ABEF all' ugualmente alto GHIK, come le tre basi BCD, BDE, BEF alla medesima HIK; l' intero prisma poligono ACF al triangolare GHIK si avrà, come il poligono CF al triangolo HIK (24. 5.*p.*). Tav.II. *Fig.*16.

Pongasi CF uguale ad HIK, ed il prisma ACF uguaglierà l'altro GHIK. E date le condizioni stesse il prisma LMN uguaglia il triangolare OPQR. Si avrà dunque il prisma ACF

ad LMN, come GHIK ad OPQR, o come il doppio HS al doppio PT. Per la qual cosa a' prismi generalmente conviene, quanto delle proporzioni de' parallelepipedi si è finora dimostrato.

Quindi i prismi di ogni genere tra se si hanno, come le basi, date le altezze uguali; come le altezze, date uguali le basi; e date disuguali le une insieme e le altre, si hanno nella ragione, che di quella delle basi e di quella delle altezze si compone. Ne' prismi uguali di più la ragione delle basi è simile all' inversa delle altezze; e quei, ne' quali si dà tal somiglianza di ragioni, sono uguali. I simili in oltre seguono la triplicata ragione de' lati omologhi. Ed al fine i simili descritti similmente su de' lati proporzionali, costituiscono proporzione; e se la costituiscono, hanno i lati omologhi tra se proporzionali.

LIBRO II.

DEFINIZIONI.

I. SE più che due triangoli tra se inclinati s' incontrino nel vertice medesimo, e di ogni intorno vadano colle basi a terminare ne' lati di una piana figura; il solido, che abbia quel vertice stesso, e quella figura piana per base, si chiamerà *Piramide*.

II. Se una retta da un punto sublime arri-

vi a un punto di una circonferenza di cerchio, e dintorno a questa col punto sublime immobile girando, descriva una superficie; il solido, che abbia quel sublime punto per apice, per base il cerchio, per lato la retta rotante, e la descritta dal lato per superficie, si dirà *Cono*. *Asse* poi del cono si dirà quella retta, che tra'l vertice di esso, ed il centro della base si conduce.

III. Se alla retta tirata tra' centri di due cerchi paralleli ed uguali si tiri tra due punti delle circonferenze una parallela, e questa sempre parallela all'altra girando dintorno alle circonferenze, descriva una superficie; il solido, che abbia per asse la retta tra' centri, per basi i cerchi, per lato la parallela all'asse, e la descritta dal lato per superficie, si nominerà *Cilindro*.

IV. Ogni cono, o cilindro è *Retto*, o *Scaleno*, secondochè ha l'asse retto alla base, o vero inclinato. Que' coni poi, o que' cilindri sono *Simili*, che hanno gli assi similmente inclinati alle basi, e proporzionali a' raggi di esse.

V. La *Sfera* è un solido compreso da una superficie, alla quale quante rette arrivano dal punto intermedio del solido stesso, tutte sono tra se uguali. *Centro* quel punto; *Raggi* le rette uguali; e *Diametro*, o vero *Asse* della sfera si dice la retta tirata per lo centro, che da ambedue le parti termina nella superficie.

VI. Di una proposta grandezza maggiore il *Residuo*, *Minore* della grandezza minore proposta, è quello, che si ritrova, togliendo sempre

 più

più che la metà e dalla maggiore, e dal primo residuo di essa, e successivamente dagli altri, finchè sia uopo.

Che trovar poi si debba quel residuo minore, se tal metodo si adopri, è manifesto. Imperciocchè se la minore grandezza si moltiplica, finchè superi l'omogenea maggiore; e più che la metà si toglie da questa, e da' suoi residui altrettante volte, quante quella si è moltiplicata; come la prodotta per la moltiplicazione supera la maggiore intera, così la minore proposta dovrà molto più superare il residuo ultimo della proposta maggiore.

PROPOSIZIONE I.

I poligoni simili descritti ne' cerchi si hanno tra se, come i quadrati de' diametri.

Tav.III. *Fig.* 1. Ne' cerchi ABC, DEF sieno descritti i poligoni simili ABG, DEH. Questi saranno, come i quadrati de' diametri AI, DK.

Imperocchè si conducano le rette AB e DE, IL e KM. E poichè i triangoli LAB, MDE per la somiglianza de' poligoni hanno il lato LA ad LB, come MD ad ME, e l' angolo ALB uguale a DME; avranno anche l' altro ABL uguale all' altro DEM (*6.6.p.*). Ma l' angolo ABL ad AIL, e l' altro DEM a DKM è uguale (21.3.*p.*). Sicchè l' angolo AIL sarà uguale a DKM. Ed il retto ALI nel semicerchio uguaglia il retto DMK (31.3.*p.*). Sicchè ne' triangoli ALI, DMK tra se equiangoli si avrà AL ad AI, come DM a DK (4.*6.p.*).

6. p.). Permutando però si ha AL a DM; come AI a DK. Come adunque il poligono ABG al simile DEK è in duplicata ragione di AL a DM (20. *6. p.*); sarà così ancora nella ragione duplicata di AI a DK: Ed in questa ragione stessa è il quadrato di AI al simile di DK. Come dunque il quadrato di AI a quello di DK; così sarà il poligono ABG a DEH.

PROPOSIZIONE II.

I cerchi tra se sono, come i quadrati de' diametri.

Sieno i cerchi ABC, DEF. Questi si avranno tra se, come i quadrati de' diametri AG, DH.

TAV. III *Fig. 2.*

Altrimenti si abbia come il quadrato di AG a quello di DH, così il cerchio ABC ad uno spazio P minore per la grandezza Q del cerchio DEF; ed in esso si descriva il quadrato IK (*6. 4. p.*). E poichè i quadrati di DK, e di HK per l' uguaglianza de' loro lati sono tra se uguali, e presi insieme uguagliano l' altro di DH per l' angolo retto DKH; sarà il solo IK la metà dell' altro di DH. Ma questo è maggiore del cerchio DEF, dintorno al quale si può descrivere (7. 4. *p.*). Pertanto IK sarà maggiore della metà del cerchio medesimo; e perciò da esso togliendosi, toglierassene più che la metà. Segandosi poi in parti uguali l' arco DK nel punto L (30. 3. *p.*), e compiendosi il parallelogrammo MK, ed il triangolo DLK; questo esser dee la metà di MK (41. 1. *p.*).

Sic-

Siccome adunque MK della porzione circolare DLK, così il triangolo DLK della metà di essa sarà maggiore. Parimente i triangoli DNI, IEH, HFK sono maggiori, che le metà delle circoscritte porzioni rimanenti. Sicchè tolto il quadrato IK dal cerchio DEF, se dalle prime porzioni residue que' triangoli si tolgano; si toglierà più che la metà di esse. E costruendosi similmente de' triangoli, e togliendosi dalle residue porzioni seconde, dalle terze, dalle altre seguentemente; si toglie sempre più che la metà. Laonde verrassi a tali residue porzioni della grandezza maggiore proposta DEF, che insieme prese sieno minori della proposta grandezza minore Q (*def. 6.*). Quindi se una di quelle sia DN; differendo dal cerchio DEF lo spazio P per Q, e per una grandezza minore il poligono DEL; questo dello spazio P sarà maggiore. Or se nel cerchio ABC si descriva il poligono ABO simile a DEL; conciossiachè aver si dee ABO a DEL, come il quadrato di AG a quello di DH (*pr.* 1.), ed il quadrato di AG a quello di DH si ha per l'ipotesi, come il cerchio ABC allo spazio P; si avrà ancora il poligono ABO a DEL, come il cerchio ABC allo spazio P (11. 5. *p.*). Conciossiachè dunque il poligono ABO è minore del cerchio ABC; anche l'altro DEL dello spazio P sarà minore (14. 5. *p.*). E si era dimostrato maggiore. Sicchè ciò ripugnando; ripugna altresì, che si abbia come il quadrato di AG a quello di DH, così il cerchio ABC ad uno spazio minore del cerchio DEF.

Che

Che se pongasi come il quadrato di AG a quello di DH, così il cerchio ABC ad uno spazio R maggiore del cerchio DEF; sarà invertendo come il quadrato di DH all' altro di AG, così lo spazio R al cerchio ABC. Fatto pertanto lo spazio R al cerchio ABC, come l' altro DEF minore di R allo spazio S, che di ABC esser dee minore (14. 5. *p.*); si avrà come il quadrato di DH all' altro di AG, così il cerchio DEF allo spazio S minore del cerchio ABC (11. 5. *p.*). Ma ciò si è dimostrato assurdo. Dunque è assurdo, che si abbia come il quadrato di AG a quello di DH; così il cerchio ABC ad uno spazio maggiore del cerchio DEF. Laonde aver si dovrà il cerchio ABC all' altro DEF, come il quadrato di AG a quello di DH.

PROPOSIZIONE III.

Ogni piramide triangolare si può dividere in altre due simili all' intera, e tra se simili ed uguali, ed in due prismi parimente uguali, e maggiori, che la metà dell' intera piramide stessa.

Sia la piramide triangolare ABCD. Divider si potrà, secondochè si è proposto. Tav. III *Fig.* 3.

Perciocchè se de' triangoli, che la comprendono, tutti i lati si seghino per metà; essendo parallele a' lati rimanenti le rette, che tra' punti delle sezioni si conducono (2. 6. *p.*); equiangoli saranno e simili come i triangoli ABC, AEF, EBH, così gli altri ABD, AEG, EBI, non meno che i due ACD, AFG, e i due

BCD,

BCD, BHI (4. *6. p.*). Simili di più sono gli altri ACD ed EHI, BCD ed EFG; attesochè essendo terminati da lati paralleli, sono equiangoli (*pr.* 10. 1.). Dunque le piramidi ABCD, AEFG, EBHI, comprese da piani simili e di numero uguali, simili tra se saranno (*def.9.*1.).

Perchè in oltre de' piani AEF ed EBH, AEG ed EBI sono uguali come i lati AE, EB interposti agli angoli uguali, così i rimanenti (*26.* 1. *p.*); ciascuno de' triangoli, che comprendono la piramide AEFG, sarà uguale a ciascuno degli altri, ne' quali l' altra EBHI va a terminare (4. 1. *p.*). Per la qual cosa le piramidi AEFG, EBHI, contenute da piani simili ed uguali di moltitudine non meno che di grandezza, saranno tra se uguali (*def.* *9.* 1.).

Or queste tolte se il solido rimanente si seghi dal piano EK; conciossiachè sono tra se parallele e le due FE, KI, che a CH, e le due FK, EI, che a GD sono parallele (*pr.9.*1.); il piano EK sarà parallelogrammo, non altrimenti che i piani HF ed HK, GI e GK. Conciossiachè dunque i triangoli FCK ed EHI, EFG ed IKD, che di essi congiungono i lati opposti, sono paralleli (*pr.* 15. 1.), simili (4. *6. p.*), ed uguali (4. 1. *p.*); i solidi EKC, EKD saranno due prismi (*def.* 10. 1.). E per l'uguaglianza delle rette CK, KD la base parallelogramma FK del primo è doppia della base triangolare IKD dell' altro; e di amendue in oltre una è l' altezza, essendo una la perpendicolare, che dal vertice comune E sul piano BCD può cadere. Sicchè amendue saranno uguali (*pr.* 40. 1.).

Fi-

Finalmente è chiaro, che uno de' prismi EKD sia maggiore di una delle piramidi EBHI, che ha l'altezza medesima ed uguale la base. Divisa pertanto la piramide ABCD in altre due ed in due prismi, questi saranno più che la metà della stessa ABCD.

PROPOSIZIONE IV.

Se di due piramidi triangolari ugualmente alte si divida ciascuna in due uguali prismi e in due piramidi tra se uguali e simili all' intera, e queste somigliantemente si dividano, e fino a un termine qualunque si continui tal divisione; i prismi di una a' corrispondenti prismi dell' altra si avranno, come di una la base alla base dell'altra.

Sieno di pari altezza le piramidi triangolari ABCD, OLMN, e si dividano nella proposta maniera. I prismi di esse ugualmente molti seguiranno la ragione delle basi BCD, LMN.

Imperocchè essendo i piani EFG, PQR paralleli alle basi (*pr.* 3.); come segano per metà i lati AC, OM, per metà così segheranno le altezze uguali delle piramidi stesse (*pr.*17.1.). Laonde i solidi, ne' quali queste si risolvono, saranno ugualmente alti; e sarà perciò il prisma EKD a PVN, come IKD a TVN (*cor. pr.*40. 1.). Ma poichè il lato KD è al doppio CD, come l'altro VN al suo doppio MN; esser dee il triangolo IKD al simile BCD, come l'altro TVN al suo simile LMN (22. 6. *p.*). Poichè dunque si ha permutando IKD a TVN, come BCD ad LMN; si avrà come BCD ad LMN,

così

così il prisma EKD a PVN (11.5.*p.*), e così i due uguali EKC, EKD agli uguali PVM, PVN (15.5.*p.*). Similmente si dimostrano i due prismi della piramide AEFG a quei dell' ugualmente alta OPQR, come EFG a PQR, o come BCD ad LMN. Saranno pertanto i due della piramide ABCD a' due di OLMN, come quei di AEFG a quei di OPQR. Quindi i quattro di ABCD e di AEFG a' quattro di OLMN e di OPQR si avranno, come i due primi agli altri due (12.5.*p.*), cioè come BCD ad LMN. E per la ragione medesima i prismi di numero maggiore, ne' quali seguentemente si dividono le parti residue della piramide ABCD agli ugualmente molti della piramide OLMN si avranno sempre, come la base BCD alla base LMN.

PROPOSIZIONE V.

Le piramidi triangolari ugualmente alte seguono la ragione delle basi.

Sieno di uguale altezza le piramidi triangolari ABCD, OLMN. Saranno, come le basi BCD, LMN.

Altrimenti si abbia come BCD ad LMN, così la piramide ABCD ad un solido X minore di OLMN per la grandezza Z. E poichè divisa una piramide in altre due simili ed uguali, ed in due uguali prismi, sono questi più che la metà della divisa (*pr.* 3.); se in tal modo si divida e la piramide OLMN, e di essa indi le parti; saranno le prime piramidi residue meno che la metà dell' intera, le seconde meno

no che la metà delle prime, le altre ſeguenti meno che la metà delle precedenti. Quindi venir ſi dovrà a tali piramidi reſidue, che preſe inſieme ſieno minori della propoſta grandezza Z (*def.* 6.). E quindi ſe una di quelle ſia OPQR; differendo dall' intera OLMN il ſolido X per Z, e per una grandezza minore i priſmi PVM, PVN; queſti del ſolido X ſaranno maggiori. Diviſa però ſimilmente la piramide ABCD, perchè eſſer debbono i priſmi EKC, EKD agli altri PVM, PVN, come BCD ad LMN (*pr.* 4.), e come BCD ad LMN, così è per l'ipoteſi ABCD ad X; ſarà come ABCD ad X, così i priſmi EKC, EKD agli altri PVM, PVN (11. 5. *p.*). Siccome quei pertanto della piramide ABCD, gli altri così del ſolido X ſaranno minori. Ed erano maggiori. Eſſendo adunque ciò aſſurdo; aver non ſi può come BCD ad LMN, così la piramide ABCD ad un ſolido minore di OLMN.

Pongaſi ora come BCD ad LMN, così la piramide ABCD ad un ſolido Y maggiore di OLMN. E poichè ſi ha invertendo LMN a BCD, come Y ad ABCD; ſe facciaſi come Y ad ABCD, così OLMN minore di Y ad un quarto proporzionale, che di ABCD eſſer dee minore (14. 5. *p.*); ſi avrà parimente come LMN a BCD, così la piramide OLMN ad un ſolido minore di ABCD (11. 5. *p.*). Ma ciò ſi è dimoſtrato ripugnare. Nè pure adunque aver ſi può come BCD ad LMN, così la piramide ABCD ad un ſolido maggiore di OLMN. Per la qual coſa ſi avrà la piramide

ABCD ad OLMN, come la base BCD ad LMN.

PROPOSIZIONE VI.

Le piramidi di pari altezza, qualunque elle sieno, sono tra se, come le basi.

TAV.III. Fig. 4. Sieno ugualmente alte le piramidi ABD, EFG. Tra se saranno, come le basi BD, FG.

Perocchè se distesi de' piani tra' vertici e le rette, che dividono in triangoli le basi, si risolvano le date piramidi in triangolari; essendo una la perpendicolare, che sopra un piano cade da un punto sublime (*pr.* 13. 1.); una delle tre AB, AC, AD, e delle due EF, EG una parimente sarà l' altezza. Questa però a quella è uguale. Sicchè ugualmente alte saranno le cinque piramidi triangolari, nelle quali le date si risolvono. Imperciò sarà AB ad AC, come B a C (*pr.* 5.); e componendo ABC ad AC, come BC a C. Di più AC è ad AD, come C a D. Sarà pertanto ordinando ABC ad AD, come BC a D; e componendo ABD ad AD, come BD a D. Ma AD ad EG si ha, come D a G; e poichè si ha EF ad EG, come F a G, componendo aver si dee EFG ad EG, come FG a G; ed invertendo EG ad EFG, come G ad FG. Sicchè ordinando di nuovo si avrà ABD ad EFG, come BD ad FG.

PROPOSIZIONE VII.

Ogni piramide è la parte terza del prisma, che ha la stessa base ed altezza.

Su

Su la base triangolare BCD nell' altezza medesima sia costituita la piramide ABCD, ed il prisma ECD. La piramide sarà del prisma la terza parte. TAV.III. *Fig.* 5.

Perocchè si seghi il solido ABDFE dal piano ABF. E poichè le piramidi ABFE, ABFD hanno nel piano ED le basi, ed il vertice comune A; avranno comune l' altezza (*pr.*13.1.); e perciò seguiranno la ragione delle basi BFE, BFD (*pr.* 5.). Ma queste sono uguali (34. 1. *p.*). Dunque le piramidi ABFE, ABFD uguali tra se saranno. Ed uguali sono le altre ABFE, ABCD; conciossiachè poste su le basi uguali EAF, BCD hanno l' altezza del prisma. Sicchè la sola ABCD sarà il terzo di tutte tre, o del prisma ECD, che di esse tre si compone.

Perchè si ha poi come la base BCD ad HI, così la piramide ABCD all' ugualmente alta GHI (*pr.* 5.); e così in oltre il prisma ECD all' ugualmente alto HK (*cor. pr.* 40. 1.); aver si dee la piramide ABCD a GHI, come il prisma ECD ad HK (11. 5. *p.*). Siccome adunque la piramide ABCD del prisma ECD; così l' altra GHI dell' altro HK per l' indole della proporzione sarà la parte terza.

PROPOSIZIONE VIII.

Le piramidi simili seguono la triplicata ragione de' lati omologhi.

Sieno simili le piramidi triangolari ABCD, EFGH. Saranno nella ragione triplicata de' lati BC, FG. TAV.III. *Fig.* 6.

Imperocchè essendo simili i triangoli ABC ed EFG, ABD ed EFH, BCD ed FGH (*def.* 9. 1.); se si compiano i parallelogrammi BI ed FK, BL ed FM, BN ed FO; questi altresì saranno tra se simili. Nel parallelepipedo però i piani opposti sono simili (*pr.* 24. 1.); e simili di più sono i rettilinei simili al medesimo (21. *6. p.*). Se pertanto si compiano i solidi BP, FQ; i rimanenti piani di uno a quei dell'altro simili saranno. Quindi saranno simili i parallelepipedi BP, FQ; e tra se quindi si avranno nella triplicata ragione de' lati BC, FG (*pr.* 33. 1.). Ma le piramidi ABCD, EFGH, perchè terze parti de' prismi LBG, MFG (*pr.* 7.), de' solidi BP, FQ sono le parti seste (*pr.* 28. 1.). Sicchè di esse ancora la ragione sarà triplicata di quella de' lati BC, FG (15. 5. *p.*).

Tav.III. *Fig.* 7. Sieno ora simili le piramidi ABC, DEF; e perciò anche i poligoni BC, EF. Condotte pertanto le rette GH, IK, saranno parimente simili i triangoli BGH, EIK (26. *6. p.*). E simili sono gli altri ABG e DEI, ABH e DEK per la somiglianza delle piramidi. Poichè dunque aver si dee AG a GB, come DI ad IE; e GB a GH, come IE ad IK; si avrà ordinando AG a GH, come DI ad IK. Per la stessa ragione si ha AH ad HG, come DK a KI. Sicchè simili tra se saranno ed i triangoli AGH, DIK (5. *6. p.*), e le piramidi ABGH, DEIK (*def.* 9.). Essendo però la piramide ABGH all'ugualmente alta ABC, come BGH a BC, e l'altra DEIK a DEF,

come

come EIK ad EF (*pr.6.*); ed essendo in oltre BGH a BC, come EIK ad EF (20.*6.p.*); sarà la piramide ABGH ad ABC, come l'altra DEIK a DEF (11.5.*p.*), e permutando ABGH a DEIK, come ABC a DEF. Siccome dunque la piramide triangolare ABGH alla simile DEIK; così la poligona ABC alla sua simile DEF sarà nella ragione triplicata di quella, che ha il lato BG all'omologo EI.

PROPOSIZIONE IX.

Le piramidi uguali hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze; e quelle che alle altezze hanno proporzionali reciprocamente le basi, sono uguali.

Perciocchè sopra le basi date nelle date altezze delle piramidi s'intendano costituiti de' prismi. E perchè quelle sono di questi le parti terze (*pr.*7.); se uguali quelle sieno, questi altresì saranno uguali. Laonde le basi saranno nella ragione inversa delle altezze (*cor.pr.*40. 1.). Se poi nella ragione inversa delle altezze sieno le basi; i prismi saranno uguali (*cor.pr.*40. 1.). Sicchè anche le piramidi.

Corol. E nella stessa maniera si dimostra, che le piramidi di basi uguali seguano la ragione delle altezze: che le simili e similmente descritte sopra de' lati proporzionali formino proporzione: che formandola vicendevolmente, abbiano proporzionali i lati omologhi: e che di ogni piramide ad ogni altra si componga la ragione e di quella delle basi, e di quella delle altezze.

PROPOSIZIONE X.

Il cono è la terza parte del cilindro, che ha la base e l'altezza medesima.

TAV.III. *Fig.* 8. Sia di amendue le base ABC, l'altezza D. Sarà il primo la parte terza dell'altro.

Altrimenti il cilindro superi il triplo del cono per la grandezza X; e fatti dentro e dintorno ad esso de' prismi sopra i quadrati AE,FG, si avrà l'inscritto DAE all'ugualmente alto DFG, come AE ad FG (*cor.pr.*40.1.). Ma AE di FG è la metà (*pr.*2.). Sicchè il prisma DAE del circoscritto DFG sarà la metà; e quindi più che la metà del cilindro. Fatti in oltre de' prismi dentro e dintorno alla porzione cilindrica su le basi AIK, HK, si ha l' inscritto DAIK all'ugualmente alto DHK, come AIK ad HK. Come pertanto AIK di HK (*pr.*2.); sarà così il prisma DAIK la metà del circoscritto DHK; e quindi più che la metà della cilindrica porzione. Nello stesso modo si dimostrano tutti i solidi similmente inscritti più che le metà delle rimanenti porzioni prime del cilindro, delle seconde, delle altre. Perchè dunque tolto dal cilindro il solido DAE, ne resta meno che la metà; e tolti gl'inscritti dalle residue porzioni prime, dalle seconde, dalle altre, meno che la metà sempre ne resta; venir si dovrà a tali porzioni, che insieme prese di X sieno minori (*def.*6.). Laonde, se una di quelle sia DAI; mancando dal cilindro il triplo del cono per X, e per una grandezza minore il prisma DABI; questo del triplo del co-

no

no sarà maggiore. Ma è minore; conciossiachè è il triplo della piramide DABI (*pr.* 7.), la quale comprendendosi nel cono, del cono è minore. Conciossiachè dunque ciò è assurdo; non potrà il cilindro superare il triplo del cono.

Pongasi scambievolmente il cono superare per X la parte terza del cilindro; e costituite delle piramidi col vertice stesso del cono su le stesse basi de' prismi, si avrà altresì la piramide DAE all' ugualmente alta DFG, come AE ad FG (*pr.* 6.); onde come AE di FG, sarà così la piramide DAE la metà della circoscritta DFG; e perciò più che la metà del cono. Per la ragione medesima e la piramide DAIK, e le similmente inscritte sono più che le metà delle coniche porzioni. Poichè dunque togliendosi la piramide DAE, si toglie dal cono più che la metà; e le altre inscritte togliendosi, più che la metà dalle prime porzioni coniche, dalle seconde, dalle altre sempre si toglie; a quelle certamente si arriverà, che prese insieme sieno minori della grandezza X (*def.* 6.). Di quelle pertanto se una sia DAI; differendo dal cono per X la parte terza del cilindro, e per una grandezza minore la piramide DABI; questa della parte terza del cilindro sarà maggiore. Ed è minore; attesochè è la terza parte del prisma DABI (*pr.* 7.), che nel cilindro si comprende. Sicchè ciò ripugnando; non potrà il cono superare la parte terza del cilindro. Nè questo superar può il triplo del cono. Per la qual cosa il cono uguaglierà del cilindro proposto la terza parte.

PROPOSIZIONE XI.

I coni di pari altezza, non meno che i cilindri, seguono delle basi la ragione.

Tav.III. *Fig.* 8. Sopra le basi ABC, LMN coll' altezza D sieno costituiti due coni, o due cilindri. Questi tra se si avranno, come le basi ABC, LMN.

Altrimenti si abbia come la base ABC ad LMN, così il cono DABC ad un solido Y minore del cono DLMN per la grandezza X; e determinata la piramide DLMO, che dallo stesso DLMN differisca per una grandezza minore di X; e che di Y sia perciò maggiore (*pr.* 10.); si descriva nel cerchio ABC il poligono ABI simile ad LMO, e su di esso col vertice del cono la piramide DABI. Si avrà questa all' ugualmente alta DLMO, come il poligono ABI al simile LMO (*pr.* 6.), o come il quadrato del diametro AE a quello di LP (*pr.* 1.), o come il cerchio ABC ad LMN (*pr.* 2.), o come il cono DABC al solido Y (11.5.*p.*). Ma la piramide DABI del cono DABC è minore. Dunque l' altra DLMO sarà minore del solido Y. Ed è maggiore. Sicchè ciò ripugnando; ripugna parimente, che si abbia come la base ABC ad LMN, così il cono DABC ad un solido minore del cono DLMN.

Pongasi ora come la base ABC ad LMN, così il cono DABC ad un solido Y maggiore del cono DLMN. E poichè si ha invertendo LMN ad ABC, come Y a DABC; se si faccia Y a DABC, come DLMN minore di Y

al

al solido Z, che di DABC esser dee minore (14. 5. *p.*); si avrà altresì come la base LMN ad ABC, così il cono DLMN al solido Z minore di DABC (11. 5. *p.*). Ma ciò si è dimostrato assurdo. Pertanto è anche assurdo, che si abbia come la base ABC ad LMN, così il cono DABC ad un solido maggiore del cono DLMN. Quindi i coni ugualmente alti seguiranno delle basi la ragione. E quindi la ragione stessa seguiranno i cilindri, conciossiachè tripli de' coni (*pr.* 10.).

PROPOSIZIONE XII.

De' coni, e de' cilindri simili la ragione è triplicata di quella de' diametri delle basi.

Abbiano le basi ABC, DEF, e gli assi GH, IK, due coni, o due cilindri simili. Ed essendo scaleni, si prendano negli assi le parti uguali GL, IM; si abbassino su le basi le perpendicolari LN, MO; e per gli estremi di esse si conducano i diametri AP, DQ. Si avrà come la triplicata ragione di AP a DQ, così il cono, o il cilindro HBC al simile KEF.

Tav. III. *Fig.* 9.

Altrimenti se abbiasi così il cono HBC ad un solido Y minore di KEF; determinata la piramide KDER maggiore di Y (*pr.* 10.), si descriva similmente nel cerchio ABC il poligono ABS simile a DER, e sopra di esso la piramide HABS. E poichè per la somiglianza de' coni sono uguali gli angoli LGN, MIO, ed i retti LNG, MOI, ed i lati GL, IM; uguali saranno gli altri LN ed MO, GN ed

IO (*26. 1. p.*). Fatta però GT uguale ad IV, per l'uguaglianza degli angoli NGT, OIV sono uguali le basi NT, OV; siccome le altre LT, MV per l'uguaglianza de' retti LNT, MOV (4. 1. *p.*). Sicchè ne' coni scaleni saranno uguali gli angoli LGT, MIV (8. 1. *p.*). E ne' retti sono retti; e si ha in oltre HG a GS, come KI ad IR (*def.* 4.). Dunque i triangoli HGS, KIR saranno simili (*6. 6. p.*). Di più simili sono gli altri AGS, DIR. Si avrà pertanto HS ad SG, come KR ad RI; SG ad SA, come RI ad RD; ed ordinando HS ad SA, come KR ad RD. Nella stessa maniera si dimostra SA ad AH, come RD a DK. Laonde simili saranno ed i triangoli HAS, KDR (5. *6. p.*), e per la ragione medesima gli altri tutti, ne' quali terminano le piramidi HABS, KDER. Imperciò queste e tra se saranno simili (*def. 9.* 1.), e si avranno tra se, come la triplicata ragione di AS a DR (*pr.*8.), o di AG a DI, o di AP a DQ, o come il cono HBC al solido Y (11. 5. *p.*). Or la piramide HABS è minore del cono HBC. Sicchè l'altra KDER del solido Y sarà minore (14. 5. *p.*). Ma ciò ripugna; attesochè si è determinata maggiore. Ripugna adunque, che si abbia come la ragione triplicata di AP a DQ, così il cono HBC ad un solido minore di KEF.

Se poi abbiasi così il cono HBC ad un solido Y maggiore di KEF; si avrà invertendo la triplicata ragione di DQ ad AP, come Y ad HBC. Facendosi pertanto Y ad HBC, come KEF minore di Y a Z, che di HBC esser

dee

dee minore (14. 5. *p.*); la triplicata ragione di DQ ad AP si avrà, come KEF a Z minore di HBC (11. 5. *p.*), il che si è dimostrato ripugnare. Per la qual cosa la ragione de' coni simili, o de' cilindri loro tripli, sarà triplicata di quella, che tra se hanno i diametri delle basi.

PROPOSIZIONE XIII.

Il cilindro, segato da un piano parallelo alle basi, è segato in parti proporzionali alle altezze.

Sia il cilindro AB segato dal piano CD parallelo alle basi AE, FB. Ed essendo a queste obliquo l'asse GH; su le medesime cader si faccia dal centro I la perpendicolare KL. Sarà AD a CB, come KI ad IL.

TAV. III. Fig. 10

Imperocchè prese nell'asse prolungato le parti GM, MN uguali ad IG, ed HO uguale ad IH; con i centri M, N, O si descrivano de' cerchi uguali e paralleli a CD, e si compiano i cilindri AP, PQ, FR. E poichè i cerchi paralleli segano proporzionalmente e l'asse IN, e la perpendicolare distesa IT (*pr.* 17. 1.); siccome uguali sono le tre IG, GM, MN; uguali così saranno le altezze IK, KS, ST de' cilindri DA, AP, PQ. Laonde questi seguiranno delle basi la ragione (*pr.* 11.). Le basi però sono uguali. Sicchè anche i cilindri. Quindi l'intero QD sarà tanto di AD moltiplice, quanto l'altezza TI di KI; e quanto l'altezza V di IL, altrettanto di CB sarà moltiplice l'intero CR per la ragione medesima. Or se

TI è uguale ad IV, dee il cilindro QD essere uguale a CR; e se TI è maggiore, o minore di IV, il cilindro QD di CR esser dee maggiore parimente, o minore. Si avrà pertanto AD a CB, come KI ad IL (*def.*4. 5. *p.*).

PROPOSIZIONE XIV.

I cilindri di basi uguali, non meno che i coni, sono tra se, come le altezze.

v.III. g. 11. De' cilindri AB, CD sieno uguali le basi EB, CF. Sarà AB a CD, come l'altezza GH ad IK.

Perciocchè distesa la IK verso L, e fatta IL uguale a GH, si compia il cilindro MF. E poichè i cilindri AB, MF hanno uguali le altezze GH, LI; saranno tra se, come le basi EB, CF (*pr.* 11.). Ma queste sono uguali. Dunque ancor quelli. Si avrà pertanto AB a CD, come MF a CD (7. 5. *p.*). Si ha però MF a CD, come LI o GH ad IK (*pr.* 14.). Dunque si avrà ancora AB a CD, come GH ad IK (11. 5. *p.*). Ora i coni sono le parti terze de' cilindri, che hanno la base e l'altezza medesima (*pr.* 10.). Sicchè anche i coni di basi uguali seguiranno delle altezze la ragione (15. 5. *p.*).

v.III. g. 12. Corol. Quindi se dati i cilindri AB, FG di basi e di altezze disuguali, coll'altezza OP uguale a DE sopra la base NM uguale ad HG si costruisca il cilindro LM; e facciasi come CB ad HG, così Q ad R, e come DE ad IK, così R ad S; essendo AB ad LM, come

CB

CB ad NM, o Q ad R, ed LM ad FG, come OP ad IK, o R ad S; sarà ordinando AB ad FG, come Q ad S. Ma la ragione di Q ad S si compone delle due di Q ad R e di R ad S, o delle due di CB ad HG e di DE ad IK (*n.* 13. *cor.* 2. 5. *p.*). Delle medesime adunque si comporrà la ragione del cilindro AB ad FG. Ed il cilindro AB è ad FG, come il cono DCB ad IHG (*pr.* 10.). Sicchè de' cilindri, e de' coni la ragione si comporrà e di quella delle basi, e di quella delle altezze.

PROPOSIZIONE XV.

I cilindri, e i coni uguali hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze; e quei, che alle altezze hanno proporzionali reciprocamente le basi, sono uguali.

Perciocchè componendosi de' cilindri, e de' coni la ragione e della ragione delle basi, e di quella delle altezze (*cor. pr.* 14.); una delle componenti all' altra inversa sarà simile, se di uguaglianza pongasi la composta de' solidi (*n.* 24. *cor.* 2. 5. *p.*); e questa scambievolmente sarà di uguaglianza, se una delle componenti si ponga simile all' altra inversa (*n.*23.*cor.*2.5.*p.*).

PROPOSIZIONE XVI.

Dati due cerchi concentrici, descrivere nel maggiore un poligono di lati pari di numero, ed uguali, che non abbiano ad incontrare la circonferenza del cerchio minore.

Sieno

v.III. Sieno dintorno al medesimo centro i cerchi g.13. ABC, DEF; e sia uopo nel maggiore ABC costituire un poligono, che abbia le proposte condizioni.

Tirata per un punto D della circonferenza DEF la tangente AC, ed il diametro BG, si seghino per metà la semicirconferenza BAG, ed il quadrante, ed i seguenti archi metà de' precedenti, finchè si venga ad un arco HG minore di AG. La corda HG sarà un de' lati del poligono richiesto.

Imperocchè terminando tal poligono in altrettanti lati, quanti sono gli archi, ne' quali la circonferenza ABC si è divisa; siccome questi, quelli così saranno di numero pari. Gli archi di più sono tra se uguali. Sicchè uguali tra se saranno anche del poligono i lati. Or la corda dall'estremo A della tangente all'estremo G del diametro non può incontrare la circonferenza DEF. Molto meno adunque incontrar la potrà la corda minore HG. E le uguali ad HG ugualmente distano dal centro stesso, dal quale distano ugualmente le parti tutte della circonferenza DEF. Nè pure adunque incontrar la potranno di quel poligono i lati rimanenti.

PROPOSIZIONE XVII.

Date due sfere concentriche, descrivere nella maggiore un solido di più lati rettilinei, de' quali nessuno sia per toccare la superficie della sfera minore.

Abbia-

Abbiano le date sfere il centro A; e nella maggiore costruir si debba il solido proposto. TAV. Fig.

Si tiri per A un piano, che le seghi ambedue: e conciossiachè le rette dal centro alla superficie sferica sono uguali; le sezioni saranno due cerchi concentrici BC, FG. Nel maggiore BC si descriva un poligono di lati pari di numero, ed uguali, che non incontrino il minore FG; ed un di essi sia BD (*pr.* 16.). Sul piano BC s' innalzi perpendicolarmente il raggio AH; e per AH, e per li diametri BE, DC si seghino le sfere da' cerchi EHB, CHD ed uguali, e retti a BC (*pr.* 18. 1.). Ne' quadranti HB, HD si adattino delle corde uguali a BD; e si congiungano per le rette IK, LM, NO. Su tutti i lati del poligono BCD si continui nelle sfere la costruzione medesima; e si avrà il solido richiesto.

Imperocchè se da' punti N, O de' quadranti retti a BC sopra BC si abbassino le perpendicolari NP, OQ; queste e caderanno su le sezioni AB, AD (*pr.* 38. 1.), e tra se saranno parallele (*pr.* 6. 1.). Sono in oltre uguali; conciossiachè metà delle corde, che sottendono gli archi doppj degli uguali NB, OD. Sicchè le rette NO, PQ, che le congiungono, uguali altresì saranno e parallele. Di più sono uguali gli angoli alle circonferenze BNP, DOQ; stando sopra archi uguali. Pertanto ne' triangoli NBP, ODQ uguali saranno le basi PB, QD. Quindi essendo uguali de' raggi le parti rimanenti AP, AQ; si avrà AP a PB, come AQ a QD; e BD sarà parallela a PQ

(2. 6.

(2. 6. *p.*), non meno che ad NO (*pr.* 9. 1.). E quindi giacendo le rette BN, DO nel piano delle parallele BD, NO (*pr.* 7. 1.); in un sol piano giacerà il quadrilatero BO, siccome gli altri NM, LK per la stessa ragione. Ma uno è ancora il piano del triangolo HIK. Dunque il solido costituito nella sfera terminerà in piani rettilinei.

Se poi sul quadrilatero BO si abbassi la perpendicolare AS; condotte le rette SB, SD, saranno i quadrati di AS e di SB uguali al solo di AB, o a quello di AD, o a' due di AS e di SD. Tolto adunque il quadrato di AS, resterà quello di SB uguale all' altro di SD; onde SB sarà uguale ad SD. Similmente si dimostra uguale ad SN e ad SO. Per la qual cosa essendo il quadrilatero BO inscrittibile al cerchio del raggio SB; se fosse equilatero, il quadrato di BD sarebbe doppio di quello di SB. Solo però i tre lati NB, BD, DO sono uguali; ed il quarto NO, uguale a PQ, è minore di BD. Del quadrato di SB pertanto sarà più che il doppio l' altro di BD, ed anche più l' altro della tangente FR (*pr.* 16.). Ora i due di AS e di SB uguagliano quello di AB, o di AR, o i due di AF e di FR. Sicchè tolti i disuguali di SB e di FR, resterà il quadrato di AS maggiore dell' altro di AF; e sarà perciò AS maggiore di AF. Ma dal centro della sfera minore perviene AF alla superficie. Laonde AS oltre la superficie medesima uopo è, che si estenda. E ciò conviene a tutti i lati del solido descritto nella sfera maggiore. Poichè

chè quelli dunque toccar non possono la superficie della minore, laddove su di essi cadono dal centro le perpendicolari; molto meno toccar la potranno, laddove dal centro su di essi cadono le oblique.

Corol. Or se un solido simile si descriva in un' altra sfera, e da' centri si conducano de' raggi agli estremi de' lati di amendue; amendue si risolveranno in piramidi simili, e di numero uguali. Perchè dunque delle piramidi simili la ragione è triplicata di quella de' lati omologhi (*pr.* 8.); sarà la moltitudine delle prime alla moltitudine delle altre, o il primo solido all' altro, come la triplicata ragione de' raggi, o vero de' diametri delle sfere medesime.

PROPOSIZIONE XVIII.

La ragione delle sfere è triplicata di quella de' diametri.

Sieno le sfere A, B. Si avrà come la triplicata Tav.III. ragione del diametro CD ad EF, così A a B. *Fig.*15. Altrimenti si abbia così la sfera A alla concentrica G minore di B; e descritto in questa un solido X di più lati rettilinei, che non tocchino la superficie dell' altra G (*pr.* 17.), si descriva in A il simile Y. Sarà Y ad X, come la ragione triplicata di CD ad EF (*cor.pr.*17.), o come A a G (11. 5. *p.*). Ma Y è minore di A. Dunque X di G sarà minore (14.5.*p.*); il che è assurdo. Laonde non si avrà come la triplicata ragione di CD ad EF, così A ad una sfera minore di B.

Che

Che se abbiasi così A ad H maggiore di B; invertendo sarà la triplicata ragione di EF a CD, come H ad A; e facendo H ad A, come B ad I, sarà come la triplicata ragione di EF a CD, così B ad I minore di A. Essendosi pertanto ciò dimostrato assurdo; nè pure si avrà come la ragione triplicata di CD ad EF, così A ad una sfera maggiore di B. Onde si avrà così A a B.

L I B R O III.

PROPOSIZIONE I.

La circonferenza del cerchio è meno che il triplo ed una settima, più che il triplo ed una settantunesima del diametro.

TAV.III. *Fig.16.* Sia AB il diametro di un cerchio, C il centro, ADN la circonferenza. Questa sarà meno che il triplo e la parte settima, più che il triplo e la settantunesima parte di AB.

Imperocchè si adatti in essa dell' essagono regolare il lato AD; e condotto il raggio CD, e per A la tangente EL, si dividano per metà gli angoli ACD dalla retta CE, ACE da CF, ACF da CG, ACG da CH, ACH da CK; e facciasi l'angolo ACL uguale ad ACK, tal che l'intero ACH uguagli l'intero KCL. Ed essendo l' angolo al centro ACD sul lato dell' essagono regolare la parte sesta di quattro retti (33. *6. p.*); ACE ne sarà la dodicesima,

ACF

ACF la ventiquattresima, ACG la quarantottesima, e la novantesima sesta ACH, o l'uguale KCL. Laonde se divisa la circonferenza in novantasei archi uguali, passino altrettante tangenti per que' punti, ove ciascun arco in mezzo si divide; si verrà dintorno al cerchio a descrivere un poligono ordinato di novantasei lati, un de' quali è KL. Ora per l'uguaglianza degli angoli ACM, DCM la retta CE dal centro sega l'altra AD in parti uguali, e ad angoli retti. Perchè dunque ne' triangoli simili ACE, ACM si ha AE ad EC, come AM ad AC (8. *6. p.*); come AM di AC è la metà per l'uguaglianza del raggio col lato dell'essagono ordinato; sarà così AE la metà di EC. Perchè in oltre per gli angoli uguali ECF, ACF si ha EC a CA, come EF ad FA (3. *6. p.*); aver si dee componendo EC con CA a CA, come EA ad FA; e permutando EC con CA ad EA, come CA ad FA. Per la stessa ragione adunque si avrà ancora FC con CA ad FA, come CA a GA; GC con CA a GA, come CA ad HA; ed HC con CA ad HA, come CA a KA.

Pongasi EC di parti uguali 306: sarà la metà EA uguale a 153, e CA maggiore di 265; attesochè il quadrato di 265 è 70225, e quello di CA, differenza de' due di EC e di EA, è 70227. Si avrà pertanto EC con CA ad EA, o CA ad FA in ragione maggiore di 571 a 153 (8. 5. *p.*), o di 4568 a 1224, moltiplicati i primi termini per 8 (*n.* 3. *cor.* 2. 5. *p.*). Pongasi FA uguale a 1224: sarà CA maggio-

re di 4568 (10. 5. *p.*), ed FC molto maggiore di 4729; conciossiachè il quadrato di 4729 è 22363441, e quello di FC, somma de' due di FA e di CA, è maggiore di 22364800. Sicchè FC con CA ad FA, o CA a GA si avrà in ragione maggiore di 9297 a 1224. Pongasi GA uguale a 1224: sarà CA maggiore di 9297, e GC molto maggiore di 9377; giacchè il quadrato di 9377 è 87928129, e quello di GC, somma de' due di GA e di CA, è maggiore di 87932385. Si avrà dunque GC con CA a GA, o CA ad HA in ragione maggiore di 18674 a 1224, o della metà 9337 alla metà 612. Pongasi HA uguale a 612: sarà CA maggiore di 9337, ed HC molto maggiore di 9357; poichè il quadrato di 9357 è 87553449, e quello di HC, somma de' due di HA e di CA, è maggiore di 87554113. Laonde HC con CA ad HA, o CA a KA, o BA a KL si avrà in ragione maggiore di 18694 a 612, o della metà 9347 alla metà 306. Si ponga al fine KL uguale a 306: e BA sarà maggiore di 9347. Essendo adunque 96KL uguali a 29376, ed il triplo ed una settima di BA maggiore di $29376\frac{5}{7}$; il perimetro del poligono ordinato di novantasei lati descrittibile intorno al cerchio, e molto più la circonferenza, che da quello si comprende, esser dovrà meno che il triplo e la parte settima del diametro.

Or se della circonferenza la parte sesta NB in O, OB in P, PB in Q, e QB in R per metà si seghi; essendone OB la dodicesima, PB la

la ventiquattresima, QB la quarantottesima, e la novantesima sesta RB; la corda RB sarà uno de' novantasei lati uguali del poligono inscrittibile al cerchio. Se si compia pertanto la figura; essendo ne' triangoli AOB, SOB l'angolo O comune, ed uguali gli altri OAB, OBN; si avrà AB ad AO, come SB ad OB (4. *6. p.*), e permutando AB ad SB, come AO ad OB. Ma per l'uguaglianza degli angoli BAS, SAN si ha AN ad AB, come NS ad SB; e componendo AN con AB ad AB, come NB ad SB; e permutando AN con AB ad NB, come AB ad SB. Pertanto si avrà ancora AN con AB ad NB, come AO ad OB (11. 5. *p.*). E similmente si dimostra AO con AB ad OB, come AP a PB; AP con AB a PB, come AQ a QB; ed AQ con AB a QB, come AR ad RB.

Sia AB di parti uguali 1560: sarà la metà CB, o vero NB uguale a 780, ed AN minore di 1351; giacchè il quadrato di 1351 è 1825201, e quello di AN, differenza de' due di AB e di NB, è 1825200. Si avrà dunque AN con AB ad NB, o vero AO ad OB in ragione minore di 2911 a 780, o moltiplicati per 100 questi numeri, di 291100 a 78000. Sia OB uguale a 78000: sarà AO minore di 291100, ed AB molto minore di 301375; attesochè il quadrato di 301375 è 90826890625, e quello di AB, somma de' due di AO e di OB, è minore di 90823210000. Adunque si avrà AO con AB ad OB, o AP a PB in ragione minore di 592475 a 78000, o di 1823

 a 240,

a 240, divisi i primi termini per 325 (*n. 9. cor. 2. 5. p.*), o di 20053 a 2640; moltiplicati per 11 i quoti. Sia PB uguale a 2640: sarà AP minore di 20053, ed AB molto minore di 20227; poichè il quadrato di 20227 è 409131529, e quello di AB, somma de' due di AP e di PB, è minore di 409092409. Imperciò si avrà AP con AB a PB, o AQ a QB in ragione minore di 40280 a 2646, o di 6042 a 396, divisi per 40 que' numeri, e moltiplicati i quoti per 6. Sia QB uguale a 396: sarà AQ minore di 6042, ed AB molto minore di 6055; conciossiachè il quadrato di 6055 è 36663025, e quello di AB, somma de' due di AQ e di QB, è minore di 36662580. Quindi si avrà AQ con AB a QB, o AR ad RB in ragione minore di 12097 a 396, o del doppio 24194 al doppio 792. Sia finalmente RB uguale a 792: sarà AR minore di 24194, ed AB molto minore di 24207; conciossiachè il quadrato di 24207 è 585978849, e quello di AB, somma de' due di AR e di RB, è minore di 585976900. Sicchè si avrà AB ad RB in ragione minore di 24207 a 792, o del terzo 8069 al terzo 264. Or posta RB uguale a 264, esser dee AB minore di 8069. Essendo pertanto 96RB uguali a 25344, ed il triplo e dieci settantunesime di AB minori di $25343\frac{34}{71}$; il perimetro del poligono ordinato di novantasei lati inscrittibile al cerchio, e molto più la circonferenza, che lo comprende, sarà più che il triplo e dieci settantunesime di AB.

Di AB però è meno che il triplo ed una setti-

settima o dieci settantesime. Per la qual cosa della circonferenza la lunghezza sarà tra il triplo con dieci settantesime, ed il triplo con dieci settantunesime del diametro.

PROPOSIZIONE II.ª

Il cerchio è uguale al triangolo, che ha la circonferenza per base, e per altezza il raggio.

Sia la circonferenza ABC uguale alla base EF, ed il raggio GH all'altezza DE del triangolo DEF. Questo uguaglierà il cerchio ABC. Tav. III Fig. 17.

Altrimenti pongasi minore di ABC per la grandezza X; e determinato il poligono ABH, che dal cerchio manchi per una grandezza minore di X, e che del triangolo DEF sia perciò maggiore (*pr.* 2. 2.); sul lato AH si abbassi dal centro la perpendicolare GI. E poichè dal centro ugualmente distano i rimanenti lati; se agli estremi di questi si conducano de' raggi, si risolverà il poligono in triangoli ugualmente alti. Di essi però ciascuno uguaglia ciascuno di quei, ne' quali risolver si può il triangolo KEL, che abbia l'altezza KE a GI, e la base EL uguale al perimetro ABH (1. 6. *p.*). Sicchè il poligono ABH uguaglierà il triangolo KEL. Or questo è minore dell' altro DEF; conciossiachè la perpendicolare GI del raggio GH, ed il perimetro ABH della circonferenza ABC è minore. Dello stesso DEF adunque sarà altresì minore il poligono ABH. Ma è maggiore. Ciò pertanto ripugnando, non potrà il triangolo DEF esser minore del cerchio ABC.

Pongasi vicendevolmente maggiore di ABC per X; e descritto dintorno al cerchio il quadrato MN, e congiunta la GN, si tiri per H la tangente OP. Ed essendo il triangolo HNO all' ugualmente alto HAO, come NO ad OA, o come NO ad OH per l' uguaglianza delle tangenti OA, OH; siccome NO lato opposto all' angolo retto OHN è maggiore di OH opposto all' acuto ONH; sarà così il triangolo HON maggiore del triangolo rettilineo HOA, e molto maggiore del mistilineo HOA. Parimente si dimostra ed HNP di HPQ, ed i simili ad HNP maggiori de' simili ad HPQ. Perchè dunque togliendosi dal quadrato MN il cerchio ABC, si toglie più che la metà; e da' residui mistilinei primi, da' secondi, dagli altri simili ad NAQ togliendosi de' triangoli simili ad NOP, più che la metà sempre si toglie; arrivar si dovrà a tali mistilinei, che presi insieme sieno minori di X (*def.* 6. 2.). Quindi se uno di quelli sia HOA; mancando il cerchio dal triangolo DEF per X, e per una grandezza minore dal poligono OBP; questo del triangolo DEF sarà minore. Ma è maggiore; attesochè uguaglia il triangolo DER, che ha per altezza il raggio GH o DE, e per base il perimetro OBP o ER, siccome è chiaro per la precedente dimostrazione. Sicchè essendo ciò assurdo; il triangolo DEF nè pure esser potrà maggiore del cerchio ABC. Laonde gli sarà uguale.

Corol. Or la ragione de' parallelogrammi, o de' triangoli, che ne sono le metà, delle basi e delle altezze si compone (23. 6. *p.*). Sicchè

chè quella de' cerchi si comporrà delle circonferenze e de' raggi, o de' diametri. De' diametri in oltre è duplicata (*pr.* 2. 2.). Poichè dunque le componenti la duplicata sono simili; le circonferenze de' cerchi si avranno tra se, come i diametri.

PROPOSIZIONE III.

La superficie del cono retto è uguale al triangolo, che ha per base la circonferenza della base, ed il lato di esso cono per altezza.

Sia il cono retto ABC; e la circonferenza BDC alla base FG; ed il lato AB sia uguale all' altezza EF del triangolo EFG. Questo adeguerà la superficie ABC. TAV. III. *Fig.* 18.

Altrimenti se adegui la superficie del cono ugualmente alto AHI, che abbia la base minore HI concentrica a BC; descritto in questa il poligono DKM di lati uguali e distanti dalla circonferenza HI (*pr.* 16. 2.), sopra di esso si costituisca la piramide AKM, che per l' uguaglianza de' lati del cono terminerà in triangoli tra se equilateri; dal vertice A su la DK cader si faccia la perpendicolare AL, che di que' triangoli sarà l' altezza comune; e presa FN ad AL, ed FO uguale al perimetro DKM si compia il triangolo NFO. E poichè questo risolver si può in altrettanti triangoli, quanti di pari altezza e di basi uguali la superficie AKM ne contiene; siccome ciascuno de' primi a ciascuno degli altri è uguale (1. 6. *p.*), così l' intero NFO sarà uguale alla superficie AKM.

Ma il triangolo NFO di EFG è minore; essendo AL di AB, ed il perimetro DKM minore della circonferenza BDC. Dunque la superficie AKM ancor essa sarà minore del triangolo EFG; e quindi della superficie AHI. Di questa però è maggiore; attesochè la comprende. Essendo pertanto ciò assurdo; il triangolo EFG adeguar non potrà la superficie di un cono minore di ABC.

Se adegui poi quella del cono APQ, che abbia la base maggiore PQ concentrica a BC; fatta la costruzione medesima, la superficie della piramide ARS uguaglierà il triangolo VFX, che per altezza ha la perpendicolare AT, ed il perimetro RS per base. Or il triangolo VFX di EFG è maggiore; essendo AT di AB, ed RS maggiore di BC. Sicchè la superficie ARS sarà altresì maggiore del triangolo EFG; e quindi della superficie APQ. Ma di questa è minore; poichè in essa si contiene. Dunque ciò ripugnando; nè pure il triangolo EFG potrà adeguare la superficie di un cono maggiore di ABC. Laonde a quella del cono ABC sarà uguale.

PROPOSIZIONE IV.

La superficie del cono retto si ha alla base, come del cono il lato al raggio della base; ed uguaglia il cerchio, che per raggio ha la media proporzionale tra quelle due rette.

TAV. IV. Fig. 1. Del cono retto ABC sia AB il lato, BD il raggio della base, ed M la media proporziona-

le

le tra AB e BD. La superficie ABC ed al cerchio BEC si avrà, come AB a BD, ed uguaglierà il cerchio del raggio M.

Imperocchè il triangolo rettangolo de' lati AB, BC a quello de' lati BD, BC si ha, come AB a BD (1. *6. p.*). Ma il primo alla superficie ABC (*pr.* 3.), e l'altro al cerchio BEC è uguale (*pr.* 2.). Dunque la superficie ABC al cerchio BEC si avrà parimente, come AB a BD.

Come però AB a BD, si ha così il quadrato di M a quello di BD (20. *6. p.*); e così quindi il cerchio del raggio M all'altro BEC (*pr.* 2. 2.). Sicchè allo stesso BEC avranno la stessa ragione e la superficie ABC, ed il cerchio del raggio M; che perciò uguali tra se saranno.

PROPOSIZIONE V.

La parte del cono retto tra due cerchi paralleli ha la superficie uguale al rettangolo della parte corrispondente del lato di esso cono nella metà delle due circonferenze.

De' coni retti ABC, ADE le basi BC, DE sieno tra se parallele; tal che paralleli sieno i raggi BF, DG, sezioni di esse col piano per l'asse ABF. Sarà la superficie DC uguale al rettangolo di DB nella metà delle circonferenze BC, DE. TAV. IV. *Fig.* 2.

Imperocchè se dintorno all'angolo retto H pongasi HI ad AB, ed HK uguale a BC; e presa IL uguale ad AD, nel triangolo IHK si conduca la LM parallela ad HK; si avrà HK

ad

ad LM, come IH ad IL (4. 6. *p.*), o come AB ad AD, o come il raggio BF a DG, o come la circonferenza BC a DE (*cor.pr.*2.). Ma HK è uguale a BC. Sicchè ed LM a DE; e la superficie ADE al triangolo ILM sarà uguale (*pr.*3.). La superficie ABC in oltre adegua il triangolo IHK. Dunque la superficie DC adeguerà il trapezio HM, o i due triangoli LHK, LMK, o i due rettangoli di LH nelle metà di HK e di LM (41. 1. *p.*), o vero il solo di DB nella metà delle circonferenze BC, DE (1. 2. *p.*)

PROPOSIZIONE VI.

La superficie del cilindro retto è uguale al rettangolo del lato di esso nella circonferenza della base.

Tav.IV. Fig. 3. Sia il cilindro retto AC. Il rettangolo del lato AB nella circonferenza BC ne uguaglierà la superficie.

Altrimenti uguagli quella del cilindro DF, che nella medesima altezza abbia la base minore EF concentrica a BC; e costituito in questa il poligono BGH di lati uguali e distanti dalla circonferenza EF (*pr.* 16. 2.), sopra di esso si descriva il prisma AGH. E poichè la superficie AGH è uguale al rettangolo di AB nel perimetro GH (1. 2. *p.*); siccome questo è minore del rettangolo di AB nella circonferenza BC (1. 6. *p.*); così la superficie AGH della cilindrica DEF sarà minore. Ma è maggiore; perchè la contiene. Perchè dunque ciò ripugna; non

non potrà il rettangolo di AB in BC adeguare la superficie di un cilindro minore di AC.

Adegui ora quella del cilindro IL, che nella stessa altezza abbia la base maggiore KL concentrica a BC; e fatta la costruzione medesima, sarà la superficie del prisma IMN uguale al rettangolo di IK nel perimetro MN. Questo però è maggiore del rettangolo di AB nella circonferenza BC. Sicchè la superficie IMN sarà maggiore della cilindrica IKL. Ed è minore; poichè in quella si comprende. Poichè adunque ciò ripugna; il rettangolo di AB in BC nè pure adeguar potrà la superficie di un cilindro maggiore di AC. Onde adeguerà la superficie AC.

PROPOSIZIONE VII.

Del cilindro retto la superficie è alla base, come della base al raggio il doppio del lato; ed è uguale al cerchio del raggio intermedio alle rette stesse nella proporzione continua.

Sia AB il lato del cilindro retto AC, BD il raggio della base, ed M la media proporzionale tra 2AB e BD. La superficie AC sarà al cerchio BEC, come 2AB a BD; e sarà in oltre uguale al cerchio del raggio M.

TAV. IV *Fig.* 4.

Perciocchè il triangolo rettangolo de' lati 2AB, BC à quello de' lati BD, BC si ha, come 2AB a BD (1. *6.p.*). Il primo però al rettangolo di AB in BC, o vero alla superficie AC (*pr.6.*), e l' altro al cerchio BEC è uguale (*pr.* 2.). Sicchè la superficie AC al cerchio BEC si avrà altresì, come 2AB a BD.

Or

Or come 2AB a BD, si ha così il quadrato di M a quello di BD (20. *6. p.*); e così quindi il cerchio del raggio M all' altro BEC (*pr.* 2. 2.). Dunque allo stesso BEC avranno ugual ragione e la superficie AC, ed il cerchio del raggio M; che saranno perciò tra se uguali.

TAV.IV. *Fig.* 5. Corol. Se nel cerchio AEG si descriva il poligono AEK di lati pari di numero e tra se uguali; e dintorno al diametro AF rotandone la metà, generi il solido terminato dalla superficie AEK; si comporrà questa delle coniche de' lati AB, EF, delle coniche troncate de' lati BC, DE, e della cilindrica del lato CD. Ma le prime uguagliano i rettangoli di AB nelle semicirconferenze de' diametri BK, EG (*pr.*3.): le altre quei di AB nelle semicirconferenze de' diametri BK e CI, DH ed EG (*pr.*5.): e l'ultima quello di AB nelle semicirconferenze de' diametri CI e DH (*pr. 6.*). Sicchè l' intera AEK uguaglierà il rettangolo di AB nelle circonferenze de' diametri BK, CI, DH, EG (1.2.*p.*).

Or ne' triangoli BLA, KLM essendo uguali gli angoli al vertice L, e gli altri alla circonferenza su gli archi uguali AK, BC; esser dee BL ad LA, e come KL ad LM (4.6.*p.*), e come le metà rimanenti delle rette CI, DH, EG alle rimanenti parti di AF per la ragione medesima. Sarà pertanto BL ad LA, come la somma degli antecedenti BK, CI, DH, EG a quella de' conseguenti AF (12. 5. *p.*), o come le circonferenze de' diametri BK, CI, DH, EG a quella del diametro AF (*cor. pr.* 2.). E per la somiglianza de' triangoli ABF, ABL (8.6.*p.*).

si

si hà FB a BA, come BL ad LA. Sicchè si avrà ancora FB a BA, come le prime quattro circonferenze all', altra del diametro AF; onde il rettangolo di FB nella circonferenza di AF adeguerà l'altro di BA nelle quattro de' diametri BK, CI, DH, EG (*16. 6. p.*). Questo però adegua la superficie AEK. Dunque ancor quello.

Parimente si dimostra la superficie DAH, o CAI uguale al rettangolo di FB nella circonferenza del diametro AP, o vero AN. Di tali superficie adunque ciascuna uguaglierà il rettangolo della corda, colla quale il lato del poligono fa l'angolo nel semicerchio, e della circonferenza, che dintorno all'asse della superficie stessa si descrive.

PROPOSIZIONE VIII.

La superficie sferica è uguale al rettangolo dell'asse nella circonferenza del cerchio massimo della sfera.

Sia di una sfera il cerchio massimo ABC, ed AD il diametro. Il rettangolo di AD nella circonferenza ABC sarà uguale alla superficie ABC. *Tav. IV. Fig. 6.*

Altrimenti sia uguale alla superficie EFG di una sfera concentrica minore; e costituito nel cerchio ABC il poligono ABH di lati uguali e distanti dalla circonferenza EFG (*pr. 16. 2.*), s'intenda rotarne la metà intorno all'asse AD, finchè generi il solido terminato dalla superficie ABH. Questa uguaglierà il rettangolo di ID in ABC (*cor. prec.*). Come però ID di AD, così tal

tal rettangolo è minore di quello di AD in ABC (1.*6.p.*). Laonde anche la superficie ABH dell'altra EFG sarà minore. Ed è maggiore; poichè la contiene. Poichè dunque ciò è assurdo; non potrà il rettangolo di AD in ABC uguagliare la superficie di una sfera minore di ABC.

Che se uguagli la superficie KLM di una sfera concentrica maggiore; fatta la medesima costruzione, e condotta dal centro la PQ parallela ad NO, si avrà KN ad NO, come KP a PQ (4.*6.p.*); e come KN di KP, sarà così NO doppia di PQ. Ma PQ è maggiore di PA. Sicchè NO di AD sarà maggiore. Quindi il rettangolo di NO in KLM sarà maggiore dell'altro di AD in ABC. E quindi la superficie KLO maggiore altresì sarà della sferica KLM. Ed è minore; conciossiachè in quella si contiene. Nè pure adunque il rettangolo di AD in ABC adeguar potrà la superficie di una sfera maggiore di ABC. Per la qual cosa alla superficie ABC sarà uguale.

PROPOSIZIONE IX.

La superficie della sfera uguaglia il quadruplo del cerchio massimo; il cerchio dell'asse, come raggio; e la superficie del cilindro retto, che dintorno ad essa sfera si può descrivere.

TAV.IV. *Fig.* 7. Della sfera ABD sia C il centro, AE il diametro, ABD il cerchio massimo; e dintorno ad essa si descriva il cilindro retto FH, il quale avendo la base GIH parallela al massimo cerchio KL, avrà della base il diametro GH uguale

le al lato FG. La sferica superficie ABD sarà quadrupla del cerchio ABD; ed uguale al cerchio del raggio AE; non meno che alla superficie FH.

Imperocchè la superficie ABD adegua il rettangolo di AE nella circonferenza ABD (*pr.* 8.). Questo però è quadruplo come del triangolo, che ha l' altezza CE, e la base stessa ABD, così del cerchio ABD (*pr.* 2.). Dunque del cerchio medesimo sarà parimente quadrupla la superficie ABD.

Essendo poi tra se i cerchi, come i quadrati de' raggi (*pr.* 2. 2.); come il quadrato di AE è quadruplo dell'altro di CE, sarà così il cerchio del raggio AE quadruplo di quello del raggio CE. La superficie ABD pertanto al cerchio del raggio AE sarà uguale.

Ed essendo continuamente proporzionali 2FG, FG, e GE; il cerchio del raggio AE, o dell'uguale FG adeguar dee la superficie FH (*pr.* 7.). Sicchè alla superficie FH sarà altresì uguale la sferica ABD.

PROPOSIZIONE X.

Le superficie intere del cono equilatero, del cilindro retto, e della sfera ad essi inscritta sono tra se in proporzione continua secondo la ragione sesquialtera.

Al cerchio massimo ABD di una sfera sia circoscritto il quadrato FH, ed il triangolo equilatero MNO; ed i cerchi de' diametri NO, GH al piano ABD sieno retti. Se dintorno alle

alle circonferenze NPO, GIH rotando i lati MN, FG, costituiscano uno il cono equilatero MNPO, ed uno il cilindro retto FH; di questi solidi e della sfera ABD inscritta ad amendue le superficie intere seguiranno la continua ragione sesquialtera, la quale cioè costa di quella di uguaglianza e di quella di metà.

Imperciocchè per gli angoli retti in E, e per gli uguali in N ed O, essendo ne' triangoli MEN, MEO uguali i lati EN ed EO (26.1.*p.*); è chiaro, che il raggio CE sega il lato NO in parti uguali e ad angoli retti. Ed il raggio CQ sega l'altro MN similmente. Dunque il cerchio del raggio CM passerà per N ed O (5.4.*p.*); e prolungato l'asse ME in R, tal che si abbia l'arco NR parte sesta della circonferenza, si avrà la corda NR uguale al raggio NC (15.4.*p.*). Quindi sarà il triangolo NCR equilatero; il raggio CR dalla perpendicolare NE per metà diviso; e come ME di ER, così il rettangolo MER triplo del quadrato di CE (1.2.*p.*). Ma il rettangolo MER adegua il quadrato di NE, media proporzionale tra ME ed ER (8.6.*p.*). Pertanto anche il quadrato di NE dell'altro di CE, ed il cerchio NPO di ABD sarà triplo (*pr.* 2.2.). Or essendo come MN di NE, così della base NPO doppia la superficie MNPO (*pr.* 4.); esser dee sestupla di ABD. Sicchè l'intera MNPO di ABD sarà nonupla. L'intera FH in oltre n'è sestupla; conciossiachè n'è quadrupla la sola FH senza le basi (*pr.* 9.). Conciossiachè dunque la sferica dello stesso ABD è quadrupla; de' tre solidi

solidi le superficie intere si avranno tra se, come nove, sei, e quattro.

PROPOSIZIONE XI.

Di ogni porzione sferica la superficie è uguale al rettangolo dell' asse della sfera nella circonferenza, che dintorno all' asse della porzione si descrive.

Sia di una sfera il cerchio massimo ABD, AE l' asse, C il centro; ed FAG il massimo arco, FG il diametro della base; AH l' asse di una porzione di essa. Il rettangolo di AE nella circonferenza del diametro AH ne adeguerà la superficie FAG. Tav.IV. *Fig.* 8.

Altrimenti se adeguasse la superficie minore KIL di una porzione di sfera concentrica ad ABD; segandosi per metà e l' arco AF, ed indi le sue parti, finchè le corde AM, MF non incontrino l' arco IK; ed in giro volgendosi la figura AMF intorno ad AH, finchè generi il solido compreso dalla superficie FMAG; sarebbe questa uguale al rettangolo di EM nella circonferenza del diametro AH (*cor. pr.* 7.). Tal rettangolo però è minore dell' altro di AE nella medesima circonferenza di AH (1.*6.p.*). Sicchè la superficie FMAG di KIL sarebbe minore; il che è assurdo.

Se poi adeguasse la superficie maggiore ONP di una porzione di sfera, concentrica ad ABD; fatta la costruzione medesima, sarebbe la superficie ONQP uguale al rettangolo di RQ nella circonferenza del diametro NH. Ma tal rettangolo è maggiore di quello di AE nella circon-

ferenza del diametro AH; attesochè come NR di NC, RQ così è doppia della parallela CS (4.*6.p.*); e come CS di CA, è così RQ maggiore di AE. Pertanto la superficie ONQP dell' altra ONP sarebbe maggiore. La qual cosa parimente ripugnando; dovrà il rettangolo di AE nella circonferenza del diametro AH adeguare la superficie FAG.

Corol. I. Or AE ad AF si ha, come AF ad AH (8.*6.p.*), o come la circonferenza del diametro AF a quella di AH, o come la mezza circonferenza del raggio AF all' intera del diametro AH (*cor. pr.* 2.). Dunque il rettangolo di AE nella circonferenza del diametro AH uguaglierà quello di AF nella mezza circonferenza del raggio AF (16.*6.p.*). Il primo però alla superficie FAG; e l' altro al cerchio del raggio AF è uguale (*pr.* 2.). La superficie adunque della porzione sferica sarà uguale al cerchio, che per raggio ha la media proporzionale tra gli assi della sfera, e della porzione.

II. Si ha in oltre AE ad AH, come la circonferenza ABD a quella del diametro AH. Sicchè il rettangolo di AH in ABD uguaglierà l' altro di AE nella circonferenza di AH. E questo uguaglia la superficie FAG. Sicchè la superficie della porzione sferica sarà uguale al rettangolo dell' asse della porzione nella circonferenza del cerchio massimo della sfera.

III. Di più la zona sferica FX interposta a' cerchi paralleli de' diametri FG, TX adegua la differenza delle superficie TAX, FAG. Laonde adeguerà ancor quella de' rettangoli di AV in

ABD,

ABD, e di AH in ABD. Ma questa è uguale al rettangolo di HV in ABD (1.2.*p.*). Pertanto il rettangolo dell'asse della zona nella circonferenza del cerchio massimo della sfera alla zona stessa sarà uguale.

IV. E quello di AE in ABD è uguale alla sferica superficie ABD (*pr.* 8.). Per la qual cosa le superficie delle porzioni sferiche, delle zone, e della sfera intera si avranno tra se, come i rettangoli de' loro assi nella circonferenza del massimo cerchio della sfera. Questi però seguono degli assi la ragione. Dunque ancor quelle.

V. Finalmente di ogni cilindro retto la superficie adegua il rettangolo del lato, o dell'asse nella circonferenza della base (*pr.* 6.); e del circoscritto alla sfera la base adegua il massimo cerchio della sfera stessa. Se a questa pertanto si circoscriva un cilindro retto, ed amendue i solidi si seghino da più piani paralleli alla base del cilindro; di amendue le superficie comprese da que' piani saranno tra se uguali.

PROPOSIZIONE XII.

De' coni di uguali altezze se uno ha la base uguale alle basi insieme prese degli altri, e di quei vicendevolmente di basi uguali se uno ha l' altezza uguale alle altezze insieme prese degli altri; quello agli altri presi insieme sarà uguale.

Imperciocchè seguendo la ragione delle basi i coni ugualmente alti (*pr.* 11.2.), e quei di basi uguali la ragione delle altezze (*pr.* 14.2.); uno agli altri si avrà, come di quell'uno la base al-

le basi degli altri nel primo, e nel secondo caso come di quell' uno l' altezza alle altezze degli altri (24. 5. *p.*). Se la ragione pertanto di tali basi, o di tali altezze sia di uguaglianza; di uguaglianza altresì sarà la simile de' coni.

PROPOSIZIONE XIII.

Se al cerchio s' inscriva un poligono di lati pari di numero e tra se uguali, e dintorno al diametro ne roti la metà, o una parte, che dalla metà toglie il raggio; genererà un solido uguale al cono, che per base ha la superficie descritta da' corrispondenti lati del poligono, e per altezza la perpendicolare dal centro sopra uno di essi.

TAV. IV. *Fig. 9.* Sia ABC, o ABD del poligono la proposta parte, CE la perpendicolare proposta; e la superficie ABF, o AGH adegui la base di un cono, CE ne adegui l'altezza. Quel cono adeguerà il solido ABCF, o vero AGH.

Imperocchè per gli angoli retti in E e K, e per l'altro A comune a' triangoli ACE, AIK essendo AC a CE, come AI ad IK (4. *6. p.*), o come la superficie AIH alla base IH (*pr.*4.); sarà il cono dell' altezza CE nella base AIH uguale all' altro di AC in IH (*pr.* 15. 2.). Ma questo uguaglia i due AIH, CIH (*pr.* 12.). Dunque ancor quello. E de' due AIH, CIH si compone il solido AICH. Questo adunque uguaglierà il cono di CE in AIH. Or distesi i lati BI, FH in L, similmente si dimostrano i solidi LICH, LBCF uguali a' coni della perpendicolare CM nelle superficie LIH, LBF.

De'

De' primi pertanto la differenza adeguerà la differenza degli altri. E questa adegua il cono di CM in IF; attesochè i due di CM in IF, e di CM in LIH costituiscono l'intero di CM in LBF (*pr.* 12.). Sicchè il solido BICHF al cono di CM in IF sarà uguale. Per l'uguaglianza in oltre delle perpendicolari CE, CM (14. 3. *p.*) i due coni di CE in AIH, e di CM in IF uguagliano il solo di CE in ABF. Sicchè al medesimo sarà uguale il solido ABCF.

Differendo poi il solido BCNOF dal cilindro BO per li due coni CBF, CNO, o per quello di PQ in NO, o per la parte terza di BO (*pr.* 10. 2.); uguagliar dee il doppio cono di PQ in NO: ed essendo la superficie cilindrica BO ad NO, come 2PQ a QN (*pr.* 7.); dee il doppio cono di PQ in NO uguagliare l'altro di QN, o della perpendicolare CR, o dell'uguale CE nella superficie BO. Allo stesso pertanto uguale sarà il solido BCNOF. E l'altro DNCO per la dimostrazione precedente uguaglia l'altro di CE in DNO. Dunque l'intero AGH a' coni dell'altezza CE nella superficie ABF, BO, e DNO, e quindi al solo di CE in AGH sarà uguale.

PROPOSIZIONE XIV.

La sfera adegua il cono, che ha l' altezza al raggio e la base uguale alla superficie di essa sfera.

Sia la sfera ABD. Sarà ad essa uguale il cono del raggio AC nella superficie ABD.

Tav. IV Fig. 10.

Altrimenti se quello adeguasse una sfera minore

nore EFG concentrica ad ABD; inscrivendosi al cerchio massimo ABD un poligono di lati tra se uguali, pari di numero, e distanti dalla circonferenza EFG (*p.* 16. 2.); ed intorno al diametro AI rotandone la metà; si avrebbe il solido ABH uguale al cono della perpendicolare CK nella superficie ABH (*pr.* 13.). Ma questo è minore dell' altro di AC in ABD. Dunque il solido ABH della sfera EFG sarebbe minore; il che ripugna.

Se poi adeguasse una sfera maggiore LMN concentrica ad ABD; fatta la stessa costruzione, si avrebbe il solido LMO uguale al cono della perpendicolare CP nella superficie LMO. Siccome pertanto questo è maggiore dell' altro di AC in ABD; il solido LMO così della sfera LMN sarebbe maggiore. La qual cosa parimente ripugnando; dovrà il cono del raggio AC nella superficie ABD adeguare la sfera ABD.

PROPOSIZIONE XV.

Il settore, non meno che la rimanente parte della sfera, è uguale al cono, che per altezza ha il raggio e la sferica superficie del settore, o della parte rimanente per base.

TAV.IV. Fig.11. Sia il settore BCD. Uguale gli sarà il cono del raggio AC nella superficie BAD.

Altrimenti se tal cono fosse uguale al settore simile ECF di una sfera concentrica minore; dividendosi per metà il mezzo arco massimo AB, ed indi le sue parti, finchè le corde AG, GB non incontrino l' arco HE; ed intorno ad AC in

in giro volgendosi il rettilineo ABC; si avrebbe il solido ABCD uguale al cono della perpendicolare CI nella superficie descritta dalle corde AG, GB (*pr.* 13.). Questo però è minore dell' altro di AC in BAD. Sicchè il solido ABCD del settore ECF sarebbe minore; il che è assurdo.

Che se fosse uguale al settore simile KCL di una sfera concentrica maggiore; fatta la costruzione medesima, si avrebbe il solido MKCL uguale al cono della perpendicolare CN nella superficie MKL. Laonde siccome questo del cono di AC in BAD è maggiore; del settore KCL sarebbe così maggiore il solido MKCL. Ma anche ciò è assurdo. Dunque il cono del raggio AC nella superficie BAD uguaglierà il settore BCD.

E quello del raggio nella superficie intera uguaglia la sfera (*pr.* 14.). L' altro del raggio adunque nella superficie rimanente BOD sarà uguale al rimanente solido BCDO (*pr.*12.)

PROPOSIZIONE XVI.

La porzione della sfera è uguale al cono, che per base ha la base della porzione medesima e per altezza la retta, che dell' asse di quella si compone e della quarta proporzionale dopo l' asse della porzione rimanente, l' altro della data, ed il raggio della sfera.

Abbiano le due porzioni sferiche ABE, DBE il centro C, la base BE, gli assi AF, DF; e si ab- Tav.IV Fig.12.

ſi abbia DF ad AF, come CA ad AG, e ſcambievolmente AF a DF, come CD a DH. I coni della baſe BE nelle altezze GF, HF le ſaranno uguali.

Perciocchè eſſendo DF ad AF, come CA ad AG; ſarà invertendo AF a DF, come AG ad AC, e componendo AD a DF, come GC ad AC. Poichè però AD a DF ſi ha nella duplicata ragione di AD a DB, o di AB a BF (8. *6. p.*); aver ſi dee, come il cerchio del raggio AB a quello di BF (*pr.* 2. 2.). Poichè dunque GC altresì ad AC ſi dee avere, come il cerchio del raggio AB a quello di BF; ſarà il cono dell'altezza GC nella baſe BE uguale all'altro di AC nel cerchio del raggio AB (*pr.* 15. 2.), o nella ſuperficie BAE (*cor.* 1. *pr.* 11.). Queſto però adegua il ſettore BCE (*pr.* 15.). Sicchè ancor quello. Ora il ſettore BCE ſi compone della porzione ABE, e del cono CBE: ed il cono di GC in BE parimente ſi compone di quello di GF in BE, e dello ſteſſo CBE (*pr.* 12.). Sicchè queſto tolto, reſterà il cono di GF in BE uguale alla porzione ABE.

Nella maniera medeſima ſi dimoſtra il cono di HC in BE uguale al ſolido CBDE. Se pertanto ad amendue ſi aggiunga il cono CBE; queſto inſieme con l'altro di HC in BE, o l'intero di HF in BE alla porzione intera DBE ſarà uguale.

PRO-

PROPOSIZIONE XVII.

La sferica porzione è uguale al cono, che ha l'asse di essa porzione per raggio della base, e per altezza il raggio della sfera insieme coll'asse della porzione rimanente.

Sia la porzione ABE. Questa uguaglierà il cono dell' altezza AC con DF nel cerchio del raggio AF.

Perocchè facendosi AC ad AG, come DF ad AF; sarà permutando AC a DF, come AG ad AF; e componendo AC con DF a DF, come GF ad AF; e di nuovo permutando AC con DF a GF, come DF ad AF. Ma DF è ad AF in duplicata ragione di BF ad AF (*cor.* 8. *6. p.*), o come il cerchio del raggio BF a quello del raggio AF (*pr.* 2. 2.). Dunque AC con DF sarà a GF, come il cerchio del raggio BF a quello di AF. Per la qual cosa il cono dell'altezza GF nel cerchio del raggio BF adeguerà l' altro di AC con DF nel cerchio del raggio AF (*pr.* 15. 2.). Il primo però adegua la porzione ABE (*pr.* 16.). Sicchè anche l'altro.

PROPOSIZIONE XVIII.

La porzione della sfera è al cono di uguál base ed altezza, come all' asse della porzione rimanente l'asse medesimo insieme col raggio della sfera.

La sferica porzione BAE, ed il cono ABE abbiano la base BE, l'altezza AF. Si avrà BAE

ad

ad ABE, come DF con AC a DF.

Perocchè se facciasi DF ad AF, come AC ad AG; e sarà la porzione BAE uguale al cono della base BE nell' altezza FG (*pr.* 16.); ed imperciò al cono ABE amendue que' solidi avranno la ragione medesima (7. 5. *p.*). Ma il cono di BE in FG all' altro ABE si ha, come FG ad AF (*pr.* 14. 2.). Come pertanto FG ad AF, si avrà così la porzione BAE al cono ABE. Poichè però DF ad AF è, come AC ad AG; esser dee invertendo AG ad AC, come AF a DF; e permutando AG ad AF, come AC a DF; e componendo FG ad AF, come DF con AC a DF. Per la qual cosa anche la porzione BAE sarà al cono ABE, come DF con AC a DF.

PROPOSIZIONE XIX.

Il cono equilatero, il cilindro retto, e la sfera ad essi inscritta secondo la ragione sesquialtera sono tra se in continua proporzione.

TAV.IV. *Fig.* 7. Dintorno alla sfera ABD sia descritto il cilindro retto FH, ed il cono equilatero MNO. Di questo al cilindro, e del cilindro alla sfera la ragione sarà sesquialtera.

Imperocchè essendo del cono la base NPO tripla del cerchio massimo ABD della sfera, ed il cerchio ABD uguale alla base GIH del cilindro (*pr.* 10.); si avrà NPO a GIH, come nove a tre. Ma il cono MNPO all' ugualmente alto MGIH si ha, come NPO a GIH (*pr.* 11. 2.). Dunque si avrà ancora, come nove a tre.

tre. Ora essendo il raggio CR per metà diviso in E (*pr.* 10.); è chiaro, che ME ad AE si abbia, come tre a due. Sicchè come tre a due si avrà parimente il cono MGIH all' altro AGIH (*pr.* 14. 2.). E questo al cilindro FH si ha, come due a sei (*pr.* 10. 2.). Ordinando pertanto si avrà il cono MNPO al cilindro FH, come nove a sei. Poichè in oltre il cilindro FH al cono AGIH è, come sei a due; ed il cono AGIH all' altro CGIH, come due ad uno; e l' altro stesso CGIH a quello di CE nel cerchio quadruplo di GIH, come uno a quattro; esser dee ordinando come sei a quattro, così il cilindro FH al cono dell' altezza CE nel cerchio quadruplo di GIH, o nella superficie sferica ABD (*pr.* 9.). Poichè tal cono adunque alla sfera ABD è uguale (*pr.* 14.); ad essa altresì si avrà il cilindro FH nella ragione sesquialtera di sei a quattro.

PROPOSIZIONE XX.

La piramide ed il cono di pari altezza seguono delle basi la ragione.

Abbiano altezze uguali la piramide AB, ed il cóno CDE. Sarà AB a CDE, come B a DE. TAV.IV. *Fig.* 13.

Altrimenti se AB fosse a CDE, come B ad un cerchio concentrico F minore di DE; descritto in questo un poligono GH di lati distanti dalla circonferenza F (*pr.* 16. 2.), e sopra di esso costituita col vertice C la piramide CGH, sarebbe la piramide AB all' ugualmente alta

CGH,

CGH, come la base B a GH (*pr.* 6. 2.). Ma B a GH ha ragione minore, che ad F (8.5.*p.*). Sicchè la piramide AB all' altra CGH avrebbe minor ragione, che al cono CDE (13. 5. *p.*); onde del cono CDE la piramide inscritta CGH sarebbe maggiore (10. 5. *p.*); il che ripugna.

Se AB in oltre fosse a CDE, come B ad un cerchio concentrico IK maggiore di DE; fatta la medesima costruzione, sarebbe la piramide AB all' ugualmente alta CLM, siccome B ad LM. Siccome adunque B ad LM ha ragione maggiore, che ad IK; avrebbe così la piramide AB all' altra CLM maggior ragione, che al cono CDE. Quindi del cono CDE la piramide CLM sarebbe minore. E quindi ciò ripugnando, sarà AB a CDE, come B a DE.

PROPOSIZIONE XXI.

La piramide ed il cono di basi uguali seguono la ragione delle altezze.

TAV.IV. *Fig.* 14. Sieno di uguali basi la piramide ABC, ed il cono DEF. Sarà ABC a DEF, come l' altezza AG a DH.

Imperocchè se coll' altezza IH uguale ad AG si costruisca sopra la base EF il cono IEF; si avrà ad essa la piramide ugualmente alta ABC, come BC ad EF (*pr.* 18.). Ma BC ad EF è uguale. Sicchè la piramide ABC, ed il cono IEF e saranno tra se uguali, ed al medesimo DEF avranno la ragione medesima (7. 5. *p.*). Ora il cono IEF a DEF è, come IH a DH (*pr.* 14. 2.). Come pertanto IH, o l' uguale

AG

AG a DH, sarà così la piramide ABC al cono DEF.

PROPOSIZIONE XXII.

La ragione della piramide al cono di quella delle basi e di quella delle altezze si compone.

La piramide ABC, ed il cono DEF abbiano le basi BC, EF, le altezze AG, DH. Del primo solido all' altro la ragione si comporrà delle due di BC ad EF, e di AG a DH.

Imperciocchè se facciasi come BC ad EF, così P a Q, e come AG a DH, così Q ad R; costruendosi in oltre coll' altezza MN uguale ad AG sopra la base NO uguale ad EF la piramide MNO; ad essa si avrà l'ugualmente alta ABC, come BC ad NO, o BC ad EF, o P a Q (*pr.* 6. 2.). Ma la piramide MNO al cono DEF di base uguale si ha, come MN a DH, o AG a DH, o Q ad R (*pr.* 21.). Ordinando adunque si avrà la piramide ABC al cono DEF; come P ad R, o nella ragione composta delle due di P a Q e di Q ad R, o vero in quella, che delle due simili di BC ad EF e di AG a DH si compone.

PROPOSIZIONE XXIII.

La piramide ed il cono se tra se sono uguali, hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze; e se alle altezze hanno proporzionali reciprocamente le basi, sono tra se uguali.

Imperciocchè componendosi della piramide al cono

cono la ragione e di quella delle basi, e di quella delle altezze (*pr.* 22.); una delle componenti all' altra inversa sarà simile, quando la composta sia di uguaglianza (*n.* 24. *cor.* 2. 5. *p.*): e di uguaglianza sarà vicendevolmente la composta, quando una delle componenti sia simile all' altra inversa (*n.* 23. *cor.* 2. 5. *p.*).

Corol. Poichè ogni piramide del prisma (*pr.* 7. 2.), ed ogni cono è la parte terza del cilindro, che ha la stessa base ed altezza (*pr.* 10. 2.); è manifesto, che della piramide paragonata al cono non debba la ragione differire da quella del prisma paragonato al cilindro. Il prisma quindi ed il cilindro se abbiano uguali altezze, saranno tra se, come le basi (*pr.* 20.): se poi abbiano basi uguali, tra se saranno, come le altezze (*pr.* 21.): e delle altezze insieme, e delle basi si comporrà la loro ragione, se le prime, non meno che le altre sieno disuguali (*pr.* 22.): essendo in oltre di que' due solidi uno uguale all' altro, le loro basi seguiranno delle altezze la reciproca ragione: ed al fine seguendo le basi la ragione reciproca delle altezze, un di que' solidi all' altro sarà uguale (*pr.* 23.).

PROPOSIZIONE XXIV.

La sfera adegua la piramide, che ha l' altezza al raggio, e la base uguale alla superficie di essa sfera.

Imperocchè la sfera adegua il cono, che per base ha la sferica superficie ed il raggio per altezza (*pr.* 14.). Tal cono però è uguale alla piramide

ramide della base ed altezza medesima (*pr.* 19.). Sicchè alla piramide stessa anche la sfera sarà uguale.

Corol. Or la piramide è la terza parte del prisma posto sopra base uguale ed ugualmente alto (*pr.* 7. 2.). Il prisma adunque, che per altezza ha la parte terza del raggio e la superficie sferica per base, adeguerà la sfera. E nella maniera medesima determinar si può la piramide, non meno che il prisma uguale ed al settore, ed a qualunque sferica porzione.

PROPOSIZIONE XXV.

La ragione del cerchio al quadrato, che dintorno ad esso si può descrivere, è pressochè simile a quella di undici a quattordici.

Al cerchio ABC sia circoscritto il quadrato DE. Si avrà ABC a DE, quasi come undici a quattordici. Tav. IV. *Fig.* 15.

Imperocchè disteso il lato DF verso G, si faccia come sette a ventidue, così DF a DG; e tirato il diametro BH, si conducano le due BG, BF. Ed essendo DF uguale a BH, e DF a DG, come sette a ventidue; sarà DG prossimamente uguale alla circonferenza ABC (*pr.* 1.). Ma BD è uguale al raggio BI. Sicchè il triangolo BDG sarà prossimamente uguale al cerchio ABC (*pr.* 2.). Ed al triangolo ugualmente alto BDF si ha, come DG a DF, o come ventidue a sette. Come adunque ventidue a sette, pressochè così si avrà il cerchio ABC al triangolo BDF. Questo però, poichè metà del ret-

tan-

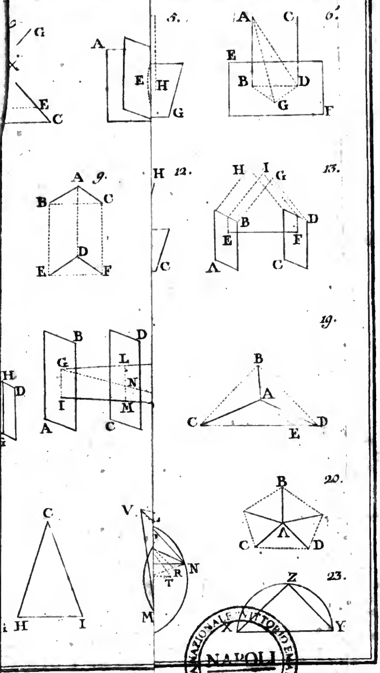
tangolo DH, è la parte quarta del quadrato DE; onde al quadrato DE aver si dee, come sette a ventotto. Ordinando pertanto si avrà il cerchio ABC al quadrato DE, quasi come ventidue a ventotto, o come la metà undici alla metà quattordici.

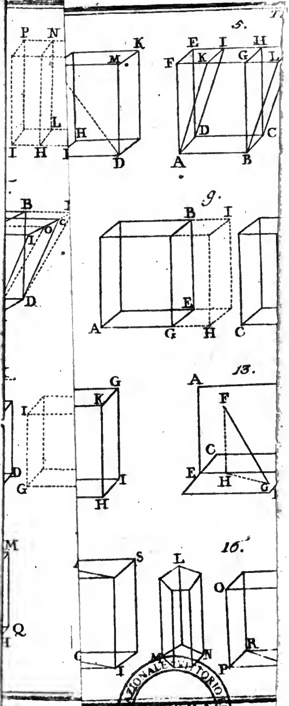
PROPOSIZIONE XXVI.

Della sfera al cubo circoscritto la ragione è quasi simile a quella di undici a ventuno.

Imperciocchè se dintorno alla sfera si concepisca oltre al cubo descriversi il cilindro retto; tal che di questo la base resti inscritta alla base del cubo, ed una sia di amendue l' altezza; si avrà come due a tre, o quattordici a ventuno, così la sfera al cilindro (*pr.* 19.). Questo però si ha al cubo, come il cerchio base di esso al quadrato circoscritto, che del cubo è la base (*cor. pr.* 23.), o prossimamente come undici a quattordici (*pr.* 25.). Sicchè perturbando la sfera al cubo, che dintorno ad essa è descritto, si avrà, pressochè come undici a ventuno.

Tav. I.




5.
9.
13.
16.

Tav. III.

